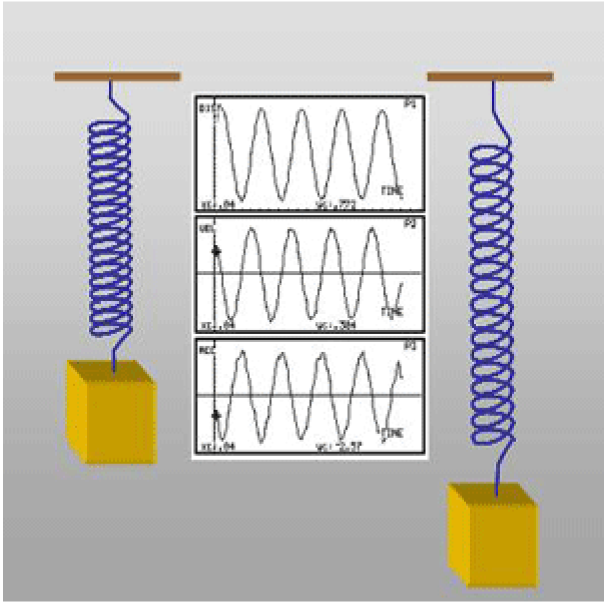
Masse-Feder-Schwingungen

Zielsetzung:

Das Experiment wurde entworfen, um Informationen über das Bewegungsverhalten eines Körpers, der an einer Feder hängt, zu erhalten.



Die Idee besteht darin, einfache harmonische Schwingungen zu untersuchen und dabei zu beobachten, wie sich Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit entwickeln, wie potenzielle Energie (elastische oder Lageenergie) in kinetische Energie oder umgekehrt umgeformt werden kann.

Darüber hinaus bietet diese Untersuchung die Möglichkeit eine Echtzeit-Datengewinnung mit einem Entfernungsmesser (SONAR, CBR) zu nutzen.

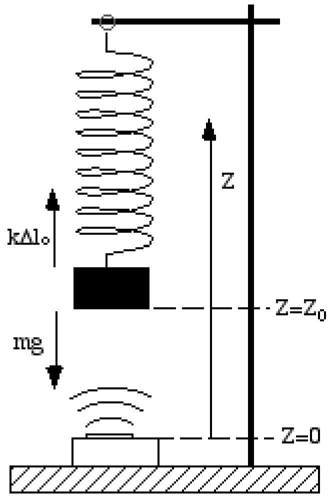
Ihnen wird gezeigt, wie Sie ein grundlegendes Experiment zu den Schwingungen eines Körpers, der an einer Feder hängt, durchführen und die experimentellen Daten analysieren können. Das wird Sie mit den grundlegenden Fakten und Konzepten zu diesem Phänomen vertraut machen.
Um zu untersuchen, wie die Schwingungshäufigkeit von der Wahl verschiedener Systemkomponenten beeinflusst wird, kann man das Experiment variieren:
- Die Art der Feder (Hookesches Gesetz)
- Die Körpermasse
- Das Körpervolumen
- Die Anordnung einer Gruppe von Federn (seriell oder parallel)

Ein tieferes Verständnis der harmonischen Bewegung wird erreicht, wenn das Verhalten des Masse-Feder-Systems mit anderen Schwingungssystemen wie
- dem Pendel
- dem Wilberforce-Pendel
- dem springenden Ball
- dem Maxwellsches Rad
- dem Atwood-Oszillator
- dem Schaukelbrett

verglichen wird.
Einige davon werden in den LEPLA-Materialien vorgestellt oder Sie finden Referenzen in den Anleitungen für Lehrer.

Theoretisches Modell

Lassen Sie uns einige Vorhersagen über die Charakteristik der Bewegung der Masse *M* mit der elastischen Konstante *k*, machen. Die Masse ist an einer Feder befestigt, die an einem festen Ständer hängt.



Was ist die elastische Konstante? Gehen Sie zu: Hooksches Gesetz

Im Gleichgewichtszustand ist der Körper zwei Kräften von gleicher Intensität und gegensätzlicher Richtung unterworfen: der Gravitation

$$P = M g \quad (1)$$

und der Feder- Rückstellkraft

$$F_0 = k \, \Delta L_0 \quad (2)$$

wobei $M, g, \Delta L_0$ die Massen sind. Die Gravitationsbeschleunigung und die Federverformung sind im Ruhezustand. Daher:

$\Delta L_0 = M g/k \quad (3)$

wenn der Körper um z ausgelenkt wird, kann die Kraft auf die Feder durch

$F = P+E_{el}= Mg-k\Delta L$ (4) berechnet werden.

Die Bewegungsgleichung wird von Newtons Gesetz beschrieben :

$$Ma = F \quad (5)$$

Wenn wir die Entstehung des Referenzbezugs in der Gleichgewichtsstellung nehmen und Folgendes festlegen:

$$\Delta L = \Delta L_0 + z \quad (6)$$

,indem wir annehmen, dass die Bewegung nur in die Richtung von z stattfindet, erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$Ma = Mg \quad k(\Delta L_0 + z) \quad (7)$$

Das können wir in einer Form schreiben, die unabhängig von der Gravitationskraft ist. Mit dem gegebenen Gleichgewichtszustand

$$Mg = k\Delta L_0 \quad (8)$$

erhalten wir:

$$Mg = - kz \quad (9)$$

Der Gleichung wird mit der folgenden Lösung entsprochen

$$z = A_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (10)$$
$$v = - A_0 \, \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (11)$$

$$a = - A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

wobei A_0 die Amplitude ist, ω die Kreisfrequenz und ϕ ist die Phase, die von der Position der Masse, bei $t = 0$, abhängt.
Die Bewegung ist daher periodisch und die Periode T (d.h., die Zeit, die für eine Schwingung nötig ist) ist: $T = 2\pi \sqrt[2]{(M/k)}$ (13)

Auf der Grundlage des oben entwickelten theoretischen Modells versuchen Sie einzuschätzen, wie die Form der folgenden Graphen aussehen würde:

- Position vs. Zeit
- Geschwindigkeit vs. Zeit
- Beschleunigung vs. Zeit
- Beschleunigung vs. Position
- Geschwindigkeit vs. Position

Qualitative Untersuchungen

Bevor Sie die Daten aufnehmen, sollten Sie zuerst das Verhalten des Systems beobachten. Dann können Sie entscheiden, mit welcher Art von Messungen Sie diese Art der Bewegung untersuchen wollen.

Hängen sie zuerst ein Gewicht an die Feder, dann ein weiteres.
Was ändert sich?
Was erwarten Sie an Veränderungen, wenn Sie ein weiteres Gewicht an die Feder hängen?
Warum haben Sie diese Erwartungen?
Was würde passieren, wenn die Feder härter wäre?
Welche Variablen halten Sie für relevant, um das Phänomen zu beschreiben? (Die Längenänderung ΔL der Feder und die angehängte Masse m)

Welche Art von Grafik würden Sie wählen, um das Verhalten der Feder zu untersuchen?
Hängen Sie ein Gewicht an die Feder und lassen Sie sie schwingen.
Handelt es sich um eine regelmäßige Bewegung?
Was bleibt scheinbar von einer Schwingung zur nächsten konstant? (Die Federlänge schwankt zischen Minimum und Maximum, die Schwingungsdauer verändert sich nicht, die Geschwindigkeit ist in der Mitte am größtem, an den Enden, wenn die Richtung gewechselt wird beträgt sie Null.)
Welche Variablen würden Sie im Verhältnis zur Zeit grafisch darstellen, um mehr über Schwingungen zu erfahren?

Datengewinnung
(TI 89/TI92+/Voyage 200, program Physics)

Wir müssen die Apparatur so aufbauen,dass wir die relevanten Änderungen in Abhängigkeit von der Zeit untersuchen können. Um das System für die Messung vorzubereiten und den Datenaufnahme-Modus zu wählen, können Sie folgendermaßen verfahren:

Verbinden Sie den Sonar mit dem Messsystem und starten Sie die Applikation PHYSICS. Auf dem Startbildschirm drücken sie ENTER, um in das Hauptmenü zu gelangen.

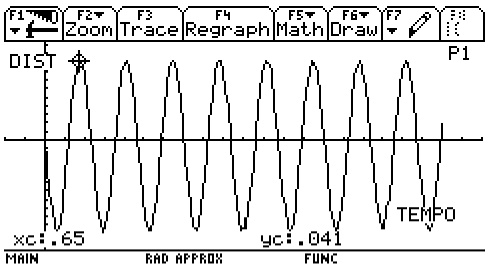
Im HAUPTMENÜ(MAIN MENU) wählen Sie 1: SET UP PROBES;

im Menü NUMBER OF PROBES wählen Sie 1: ONE;
im Menü SELECT PROBE wählen Sie 1: MOTION .
Um die Abstände von der Gleichgewichtsposition zu messen:
im MAIN MENU wählen Sie 5: ZERO PROBES,
und, in “choose channel” wählen Sie MOTION
Bei der Aufforderung die + Taste zu drücken, um auf Null zurück zu stellen, versichern Sie sich zuerst, dass die Masse in Ruhestellung ist.

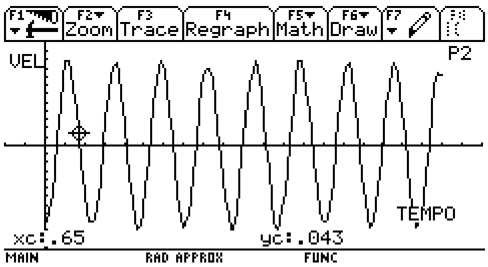
Dieser Vorgang ermöglicht es, die Distanz , deren Ursprung der Gleichgewichtszustand ist, in einem Bezugsfenster zu messen. Daher ist die Auslenkung des Körpers positiv, wenn die Masse oberhalb der Ruhestellung ist (verkürzte Feder) und negativ, wenn sich die Masse sich unterhalb der Ruhestellung befindet (gedehnte Feder).

Daten sammeln
Wählen Sie im HAUPTMENÜ(MAIN MENU) 2: COLLECT DATA.
Zeit-Proben und Anzahl der Sammeldaten müssen entsprechend der benutzten Federkonstante und Körpermasse gewählt werden.
Wählen Sie zum Beispiel SAMPLE TIME=0,1s und NUMBER OF SAMPLES=30 (sinnvoll für eine kurze Datenerfassung in leicht abgedämpften Schwingungen) oder SAMPLE TIME= 0,1 s und NUMBER OF SAMPLES= 150 (um das Verhalten einer gedämpften Schwingung zu untersuchen).

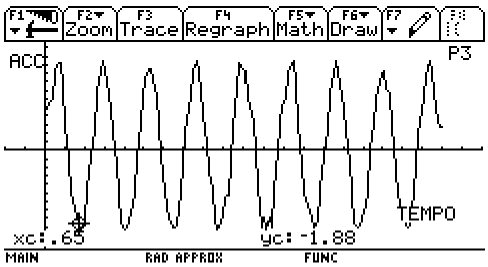
Ihr System ist jetzt bereit, die Daten zu aufzunehmen.
Heben Sie die Masse vorsichtig nach oben an (2-3 cm) und lassen Sie sie los.
Starten Sie die Messung, indem Sie ENTER drücken.
Sie erhalten drei Graphen:
Distanz



Geschwindigkeit



und Beschleunigung



als Funktionen der Zeit.
Exemplarische Datensammlung
Eine Datensammlung und Grafiken können Sie von der Webseite education.ti.com herunterladen, um Sie mit Ihren Ergebnissen zu vergleichen.

Wenn Sie mit den erhaltenen Daten zufrieden sind, sollten Sie sie speichern: Wählen Sie SAVE aus dem MAIN MENU und die Option "else"; geben Sie schließlich einen Dateinamen mit 3 Buchstaben ein.
Sie finden auf der Webseite ebenfalls ein kurzes Video zum Experimentablauf.

Datenanalyse mit dem TI 89/T92+/Voyage200

und der PHYSICS Software

Aus den gesammelten Daten lassen sich einige Informationen ableiten.
Weiter unten finden Sie eine Liste mit Analysevorschlägen, die Sie mit einem Klick erreichen können
Die hier dokumentierten Analysen wurden mit der PHYSICS-Software erstellt. Alternative Techniken können offensichtlich ebenfalls genutzt werden (DataMate, Data/MatrixEditor, grafische Analyse, Excel, ...).

Die vorstehenden Diagramme können nun analysiert werden. Die Datenwerte der Grafik können mit dem TRACE-Modus gelesen werden: Drücken sie die (rechte/linke) Pfeiltaste, damit bewegen sie den Cursor entlang den Kurven und die entsprechenden Werten der Abzisse (xc) und Ordinate (yc) erscheinen auf dem Bildschirm.

Mit einigen Fragen, die Sie während der Analyse der Graphen beantworten, können Sie die Hauptmerkmale des Phänomens erkennen.

1. Wie groß ist die Schwingungsamplitude (d.h. die maximale Dehnung)? (Die Ordinate von Maxima und Minima im Distanz-Graph)

2. Wie lang ist das Zeitintervall (Periode), nach dem sich die Bewegung nahezu identisch wiederholt? (Das Zeitintervall zwischen zwei Spitzenwerten in dem Graphen)

3. Wie beeinflusst ein Wechsel in der Zeit die Federlänge? (Setzen wir t_0 als die Zeit, an der x = -A ist, t1 als den nächsten Zeipunkt, wenn x = 0 gilt. t2 ist der Zeitpunkt, wenn x = A ; t3 ist die Zeit, wenn x = 0 und t4 ist die Zeit, wenn für x wieder x = -A gilt. Die Feder verkürzt sich von t1 zu t3 und dehnt sich von t0 zu t1 und von t3 zu t4)

4. Warum ist die Geschwindigkeit im Zeitintervall (t0; t2) positiv und im Zeitintervall (t2; t4) negativ? (Die Geschwindigkeit ist in dem Zeitintervall (t0;t2) positiv, weil sich der Körper von dem Sonar wegbewegt. Entsprechend ist die Geschwindigkeit in dem Zeitintervall (t2; t4) negativ, weil sich der Körper wieder näher zu dem Sonar hin bewegt)

5. Wann ist der absolute Wert der Geschwindigkeit maximal? Und wann ist er minimal? (Der absolute Wert der Geschwindigkeit ist maximal, wenn der Körper den Mittelpunkt der Schwingung kreuzt (Null-Entfernung). Er erreicht sein Minimum (Null), bei maximaler Dehnung (Entfernung))

6. Warum sind die Beschleunigung und der Abstand in der Phase immer gegensätzlich? (Da die elastische Kraft $F = - k x$ ist, ist daher $m a = - k x$)

Wie die Periodendauer gemessen wird

Sehen sie sich die Zeichnungen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung versus Zeit an.

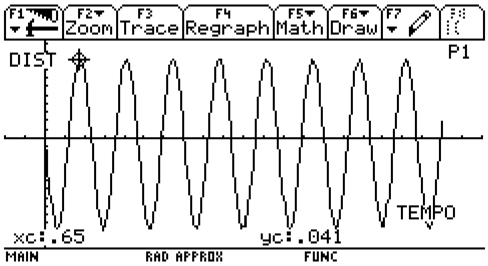


Figure 1: Distanz vs. Zeit

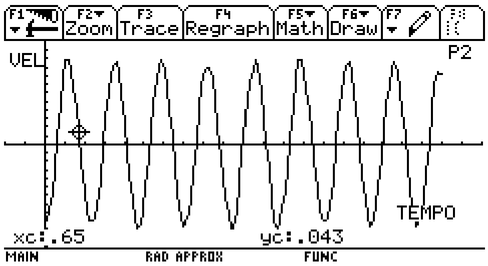


Figure 2: Geschwindigkeit vs. Zeit

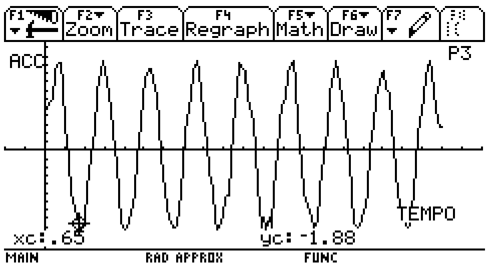


Figure 3: Beschleunigung vs. Zeit

Die Gestalt der Graphen ist sinusförmig. Wenn Sie den Cursor benutzen, können Sie die Dauer einer Schwingungsperiode schätzen.Um eine genauere Messung der Periode zu erhalten, wählen Sie das erste und letzte Maximum (oder Minimum) und berechnen das Zeitintervall zwischen beiden. Die Periode kann berechnet werden, indem das Zeitintervall durch die entsprechende Anzahl der Schwingungen dividiert wird. Ist die Periode bei allen drei Zeichnungen gleich? Warum?
Warum ist es ratsam das Zeitintervall zwischen zwei Spitzen zu berechnen?
Sie können den experimentellen mit dem theoretischen Wert vergleichen.
Sind die beiden Werte vergleichbar? Wenn nicht, was könnte Ihrer Meinung nach der Grund dafür sein?

Beschleunigung versus Distanz

Sehen Sie sich die beiden Graphen der Distanz und Beschleunigung versus Zeit an.

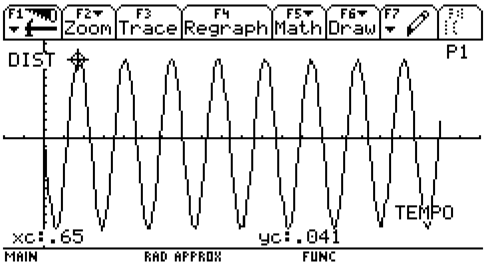


Figure 1: Distanz vs. Zeit

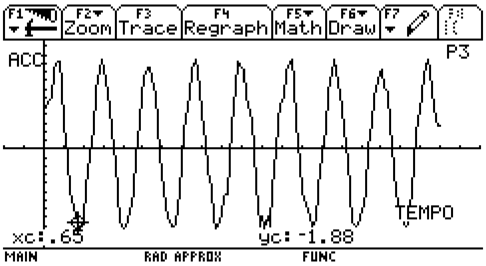


Figure 3: Beschleunigung vs. Zeit

Um sie zu vergleichen, ist es sinnvoll, sie nebeneinander zu stellen. Sie werden feststellen, dass die Periode gleich ist, aber die Phasen gegenläufig sind. Wir können daher behaupten, dass:

$$a(t) = -const\ x(t) \qquad (1)$$

Um diese Hypothese zu überprüfen, zeichnen Sie den Beschleunigungs- Distanz-Graphen.

Was für eine Art von Graph erwarten Sie?

Für eine kurze Beschreibung des Anpassungsvorgangs innerhalb von PHYSICS, siehe Hilfe: Interpolation

Wenn wir uns die Zeichnung ansehen, werden wir die proportionale Beziehung $a(t)=-const*x(t)$ zwischen a und x erkennen..
Sie können eine Gerade durch Ihre Daten zeichnen, mit der negativen Steigung C.
Was ist die physikalische Bedeutung der Proportionalitätskonstante C?

In der Grafik Beschleunigung versus Distanz finden wir:

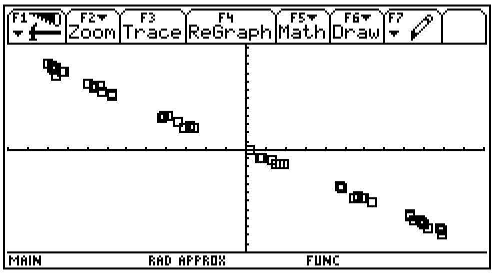


Figure 4: Beschleunigungs-Distanz-Graph

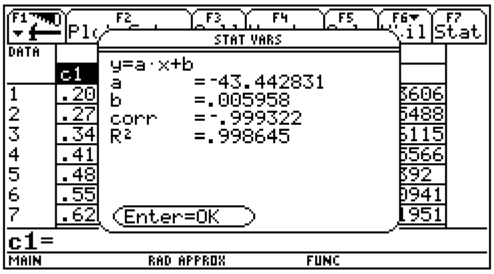


Figure 5 passende Parameter

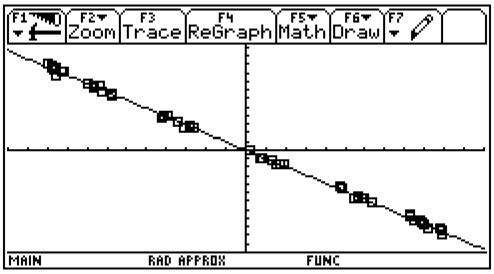


Figure 6 Optimal angepasste Datenlinie

Eine alternative Methode die Periodendauer auszuwerten

Newtons zweites Gesetz: $ma=F_e$

Mit der Definition der elastischen Kraft $F_e= - k\,x$ (siehe theoretisches Modell) wird:

$ma = - k\,x$ und daher beträgt die Beschleunigung $a = -(k/m)\,x$

Dadurch bekommt die Steigung *C* den Wert des Verhältnisses von der Elastizitätskonstante *k* zur Masse *m.*

Aber das Verhältnis $a = - \omega^2 x$
sagt uns, dass die Steigung *C* in diesem Graphen auch gleich dem Quadrat der Winkelfrequenz $\omega^2=(2\pi/T)^2$ ist.

Das ergibt eine Messung dieser Periode als $T = 2\pi/(C)^{1/2}$.

Geschwindigkeit vs. Verschiebung

Eine weniger übliche grafische Präsentation der Bewegung erhalten wir, wenn wir die Geschwindigkeit als Funktion der Position aufzeichnen.
Das ist eine Phasen-Grafik. Wie sieht das Diagramm aus? Ist es eine abgeschlossene oder spiralförmige Kurve?

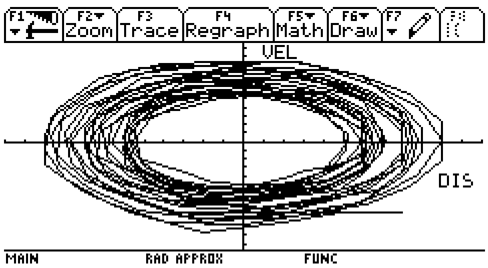


Figure 7: Geschwindigkeit als Funktion der Position

Die Zeichnung zeigt den Effekt der Reibung: Ohne Dämpfung erhalten wir eine geschlossene Ellipse. Mit Dämpfung ist die Kurve spiralförmig.

Energie-Balance-Analyse mit TI 89/T92+/Voyage200 und Data/Matrix Editor

Die Nettokraft, die auf den Körper wirkt, kann mit $F = -k\,x$ beschrieben werden, wenn die Variable *x* die Entfernung von dem Gleichgewichtszustand misst. Damit können wir die Energie-Balance berechnen, bei der nur zwei Begriffe auftauchen: die kinetische Energie und die elastische Energie (die innerhalb dieses Bezugsrahmens auch die Lageenergie berücksichtigt).

Für eine Entfernung *x* vom Gleichgewichtszustand verrichtet es die Arbeit:

$$W = \int F(x)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

Diese Arbeit ist negativ, da die Kraft und die Entfernung immer gegensätzliche Vorzeichen haben. Sie entspricht einer elastischen Energie E_e, die zu dem System addiert wird, wenn der Körper sich aus dem Gleichgewichtszustand bewegt.

Auch die kinetische Energie

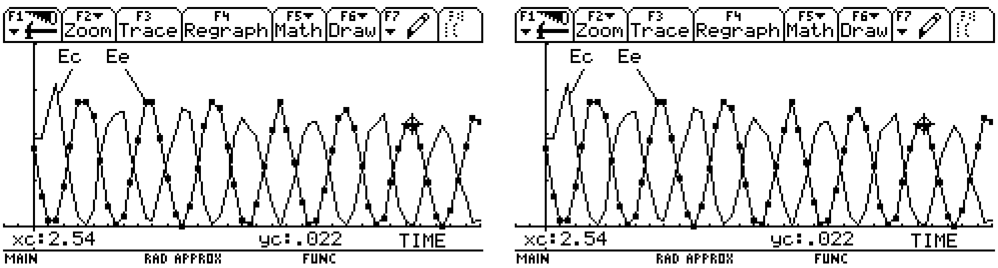
$$E_c = \frac{m}{2}v^2$$

verändert sich während der Schwingung, aber die Gesamtenergie *E* wird erhalten (in Zeitintervallen, innerhalb derer der Energieverlust vernachlässigt werden kann): z.B. die Summe $E = E_e + E_c$ muss eine Konstante sein.

Aus den experimentellen Daten können wir die Graphen der zwei Energiearten und ihrer Summen als Funktion der Zeit konstruieren (indem wir E_e als kalkulierten Wert für die elastische Konstante k benutzen, oder die gemessenen Kraftwerte, wenn wir auch den Kraftsensor benutzt haben)

Diese Berechnungen können wir ausführen (wenn wir den DATA/MATRIX Editor benutzen) indem wir die experimentellen Daten-Dateien öffnen und wir diese Werte als Funktion der Zeit aufzeichnen.. Es entstehen drei neue Spalten, die den beiden Energiewerten und ihrer Summe entsprechen

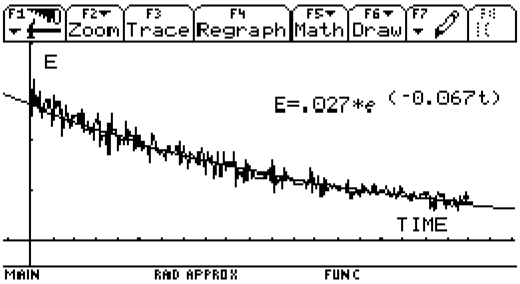
Ein Beispiel dieser Graphen, mit einer leicht gedämpften Schwingung, wird unten gezeigt:



Ec=Kinetische Energie und Ee = elastische Potentialenergie und ihre Summe Ec+Ee, versus Zeit.

Glättende Analyse mit TI 89/T92+/Voyage200

Wenn wir Daten für ein ausreichend langes Zeitintervall sammeln, können wir den vollständigen Energie-Zerfallprozess zu untersuchen. Die Bewertung der Zerfalls-Zeit-Konstante (siehe folgende Grafik) liefert uns eine exponentielle Anpassung der gesamten Energie als Funktion der Zeit.



Angenommen, die Ableitung der Kraft verhält sich im Wesentlichen proportional zur Geschwindigkeit (durch eine Proportionalkonstante α), so wird die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx - \alpha\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

und indem $m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx - \alpha\frac{dx}{dt}$ erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} + -2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2)$$

Wenn der Dämpfungskoeffizient δ klein ist ($\delta \ \omega_o$) , hat die Gleichung die Lösung:

$$x = Ao\exp(-2\delta t)\ -\ \cos(\omega t + \phi) \qquad (3)$$

wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$ (3a)

Funktion (3) ist eine gedämpfte Schwingung mit der Amplitude A und der Phase φ (Der Phasenwert hängt von dem angenommenen Startwert der Zeitskala ab).