

Newton'sches Abkühlungsgesetz



Zielsetzung:

Mit diesem Experiment soll die Abkühlgeschwindigkeit eines Körpers bestimmt und das dementsprechende mathematische Modell gefunden werden, um diesen Wechsel zu berechnen.

Versuchsaufbau und Verfahrensweise

Materialien

Thermosflasche mit kochendem Wasser, Temperatursonde, CBL und TI-83. Alternativ zu kochendem Wasser können Sie auch einen Haartrockner benutzen.

Verfahrensweise

- Bevor Sie das Experiment aufbauen, stellen Sie sicher, dass Sie die Programme [FALL](#) und [CLEAN](#) in Ihrem TI-83 zur Verfügung haben. Wenn nicht, installieren Sie sie. Kurze Anleitung zum Download finden Sie [hier](#).
- Verbinden Sie die Temperatursonde mit Kanal 1 des CBLs und verbinden Sie den CBL mit dem Rechner.
- Legen Sie die Temperatursonde in das kochende Wasser, ohne die Heizspirale oder Herdplatte zu berühren oder erhitzen Sie die Sonde mit dem Haartrockner.
- Starten Sie das Programm [TEMP](#) auf dem Rechner.
- Wählen Sie den Maßstab AUTO und eine passende Anzahl von Messungen pro Sekunde, zum Beispiel 1.
- Nehmen Sie die Sonde aus dem Wasser / aus dem Luftstrom des Haartrockners. Bringen Sie die Sonde schnell aus dem Wasserdampf, trocknen Sie sie und drücken dann ENTER. .
- Wenn das Experiment durchgeführt worden ist, wird die Temperatur (°C) als Funktion der Zeit (s) angezeigt. Die Temperaturdaten werden in Liste L2 und die Zeitdaten in Liste L1 gespeichert.
- Vergessen Sie nicht die Raumtemperatur zu notieren.

Wenn es Ihnen nicht möglich ist, das Experiment durchzuführen, stehen Ihnen Beispieldaten zur Verfügung. Damit können Sie sich das Experiment ansehen und die Daten analysieren.

Datenanalyse (TI 83)

Wenn Sie Probleme bei der Handhabung des Grafikrechners haben, bekommen Sie Hilfe über die Links im Text.

- Werten Sie die Temperatur als Funktion der Zeit in einem [Streudiagramm](#) aus.
- Betrachten Sie den Graphen. Entspricht er Ihren Erwartungen? Erscheinen Ihnen die Abkühlungsgeschwindigkeit bei den unterschiedlichen Temperaturen angemessen? Wie weit wird die Temperatur sinken?

- Um den Werten eine Funktion anzupassen, muss die Raumtemperatur von allen Temperaturdaten subtrahiert werden. Das ist eine Vorbedingung der Software. Wir schlagen vor, dass Sie die neuen subtrahierten Werte in eine neue Liste eingeben, um nicht die experimentellen Daten zu löschen. Dazu positionieren Sie den Cursor an den Anfang der Liste L3 und geben $L3 = L2 - \text{"room temp"}$.

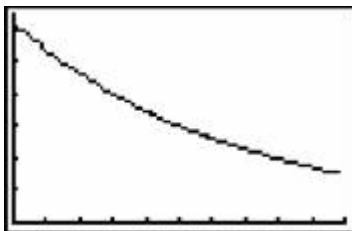
L1	L2	L3
0	80.69	-----
1	80.24	
2	79.25	
3	78.58	
4	77.7	
5	76.84	
6	75.94	
L3 = L2 - 19		

- Jetzt zeichnen Sie die Temperaturdifferenz zwischen der Sonde und der Raumtemperatur als Funktion der Zeit in einem Streudiagramm.
- Führen Sie eine passende Regression zu den gemessenen Werten durch und versuchen sie eine Schlußfolgerung daraus zu ziehen.
- Um die Abkühlungsrate in jedem Datenpunkt zu berechnen können wir dy/dx -Funktion benutzen. Sie findet sich in CALC (2:nd TRACE) und gibt die Steigung der Funktion an. Nach der Benutzung wird das Ergebnis im Antwort-Register gespeichert. Sie wird zugänglich, indem man ANS (2:nd (-))drückt. Ein einfacher Weg, um diese Daten in eine neue Liste zu übertragen ist folgender:
 - führen Sie dx/dy -Funktion auf einem Punkt aus
 - gehen Sie zum Listen-Editor (STAT Edit)
 - positionieren Sie den Cursor auf $L_6(1)$ und drücken ANS (2:nd (-)). Das überträgt die Steigung in die Zelle.
 - positionieren Sie den Cursor in $L_5(1)$ und drücken Y (ALPHA 1). Das überträgt die Temperaturdifferenz in die Zelle.
- Erstellen Sie ein Streudiagramm, das die Abkühlungsrate als Funktion der Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur zeigt.
- Führen Sie eine passende Regression zu den gemessenen Werten durch und versuchen sie eine Schlußfolgerung daraus zu ziehen.

Wenn Sie Ihre Analyse beendet haben, können Sie sie mit der kompletten (Muster-)Analyse vergleichen.

Vollständige Datenanalyse- (TI 83)

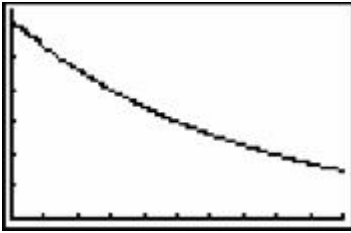
Nachdem die Raumtemperatur von den Daten subtrahiert wurde, sieht unsere Streudiagramm folgendermaßen aus:



Es ist nicht überraschend, dass wir eine höhere Abkühlungsrate haben, wenn die Temperaturdifferenz im Verhältnis zur Umgebung höher ist. Wir sehen auch, dass es begründet

ist, von einer exponentiellen Abhängigkeit auszugehen.

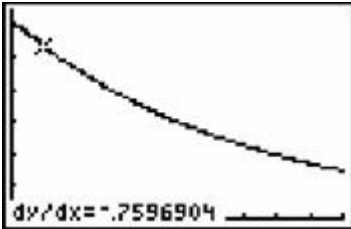
Wir tragen eine Exponentialkurve an die Daten an, indem wir exponentielle Regression (ExpReg) benutzen. Damit erhalten wir folgendes Bild:



```
ExpReg
y=a*b^x
a=61.53128895
b=.985865652
```

Wie Sie in dem linken Bild sehen, passt sich die Regressionskurve fast perfekt an die Daten an. Die Funktion ist $y = 61,5 * 0,986^x$ wobei y die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur ist und x die Zeit.

Um die Abkühlungsrate zu betrachten, benutzen wir dy/dx-Funktion auf dem Rechner. Damit können wir eine numerische Ableitung in jedem Punkt des Graphen durchführen.

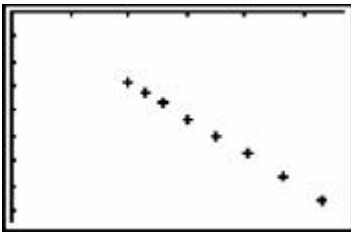


L4	L5	L6	5
53.367	-.7597	-----	
L5(2) =Ans			

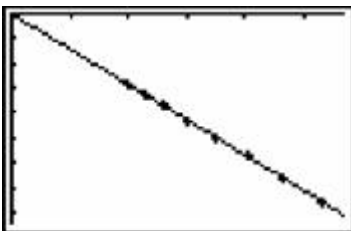
Die Funktion dy/dx wird bei x = 10 ausgeführt.

Der dy/dx - Wert wird mit Hilfe von ANS (2:nd (-)) in eine Liste eingetragen. Zur selben Zeit wird der y-Wert in eine andere Liste übertragen, indem wir Y (2:nd 1) benutzen.

Nachdem Sie dieses mit einigen Punkten getan haben, zeichnen Sie die Abkühlungsrate (die Ableitung) als Funktion der Temperaturdifferenz.



Es liegt die Vermutung nahe, dass es sich um eine lineare Funktion handelt. Deshalb wenden Sie eine [lineare Regression](#) auf die Daten an. Dadurch erhält man:



```
LinReg
y=ax+b
a=-.0142351893
b=2.7716E-10
```

Die Gleichung der linearen Funktion ist $y = -0,0142x$ was bedeutet, dass die Abkühlungsrate $-0,0142^\circ\text{C/s}$ je Grad Temperaturdifferenz zur Umgebung ist, z.B. $-0,0142\text{ s}^{-1}$.

Die Abkühlungsrate kann besser als Ableitung $\frac{dT_c}{dT}$ ausgedrückt werden.

Man erhält die Gleichung : $\frac{dT_c}{dT} = -k(T_c - T_0)$ mit $k = 0,0142 \text{ 1/s}$.

T_c ist die Temperatur in °C und T_0 die Raumtemperatur.

Die Abkühlungsrate verhält sich proportional zu der Differenz der Temperatur zwischen dem Objekt und der Umgebung. Die Gleichung ist das **Newtonsches Abkühlungsgesetz**.

Datenanalyse (mit MS Excel MS Windows Dateien)

Die Temperaturdaten von unserem Experiment wurden mit dem Verbindungskabel auf den PC und dort in ein Excel-Tabellenblatt übertragen. Öffnen sie die Datei Newtcool in Excel.

Sie finden die Zeitdaten (Einheit s) in Spalte A und die Temperaturdaten (Einheit °C) in Spalte B. Wenn das Experiment fertig gestellt ist, finden Sie die Raumtemperatur in Zelle G2.

- Zeichnen Sie den Temperatur-Zeit-Graphen in das Streudiagramm ein.
- Betrachten sie den Graphen. Entspricht er Ihren Erwartungen? Erscheinen die Abkühlungsraten bei den verschiedenen Temperaturen logisch? Wie weit wird die Temperatur wohl sinken?
- Um eine geeignete Funktion zu finden, muss die Raumtemperatur von allen Temperaturdaten subtrahiert werden. Das ist eine Vorbedingung der Software. Wir schlagen vor, dass Sie diese Berechnungen in Spalte C durchführen. Setzen Sie den Cursor in Zelle C2 und geben Sie die Formel “=B2-\$G\$2” ein. Dann kopieren Sie die Formel in alle Zellen der Spalte C nach unten.
- Jetzt zeichnen Sie die Temperaturdifferenz zwischen der Sonde und der Raumtemperatur als Funktion der Zeit in einem Streudiagramm. Da die Spalten, die dargestellt werden sollen, nicht nebeneinander liegen, funktioniert das etwas anders als oben beschrieben.
- Führen Sie eine geeignete Regression zu den gemessenen Werten durch, und versuchen sie eine Schlussfolgerung daraus zu ziehen.
- Berechnen Sie die Abkühlungsrate in jedem Datenpunkt mit dem symmetrischen Differenzquotienten. Wir schlagen vor, Sie tragen diese Daten in D3:D99 ein.
- Erstellen Sie ein Streudiagramm , das die Abkühlungsrate als Funktion der Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur zeigt.
- Sehen Sie sich diese Zeichnung genau an. Seien Sie sich der eingeschränkten Genauigkeit der Temperaturmessungen bewußt. Versuchen Sie - unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit - eine passende Funktion zu finden, um die Daten grafisch darzustellen. Sie sollte natürlich die ursprüngliche Funktion überzeichnen. Wenn es keine Temperaturdifferenz gibt, gibt es auch keine Abkühlung.

- Versuchen sie nun eine angemessene Schlussfolgerung aus den Ergebnissen des Experiments zu ziehen.

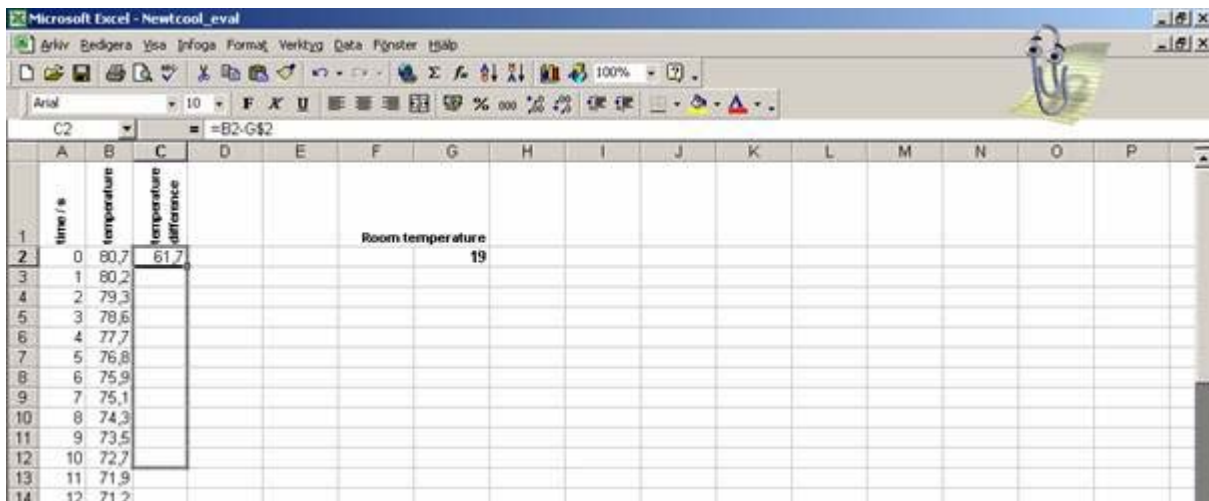
Wenn Sie Ihre Analyse beendet haben, können Sie sie mit der kompletten (Muster-)Analyse vergleichen.

Datenanalyse (mit MS Excel MS Windows Dateien)

Hinweis: Die Screenshots stammen aus der schwedischen Version von MS-Excel

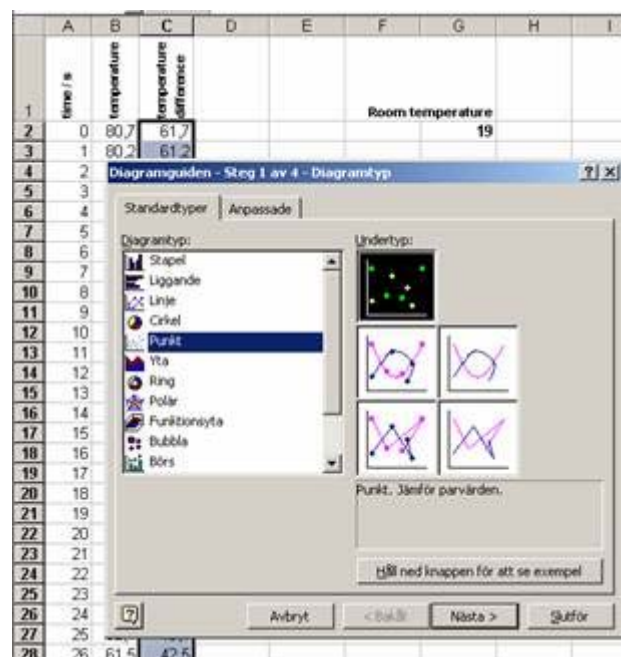
Versehen Sie Spalte C mit einer Spaltenüberschrift.

Jetzt geben sie die Formel $=B2-G\$2$ in Zelle C2 ein und kopieren sie nach unten bis zur Zelle C100. Das Bild unten zeigt den Bildschirm während des Kopierens.

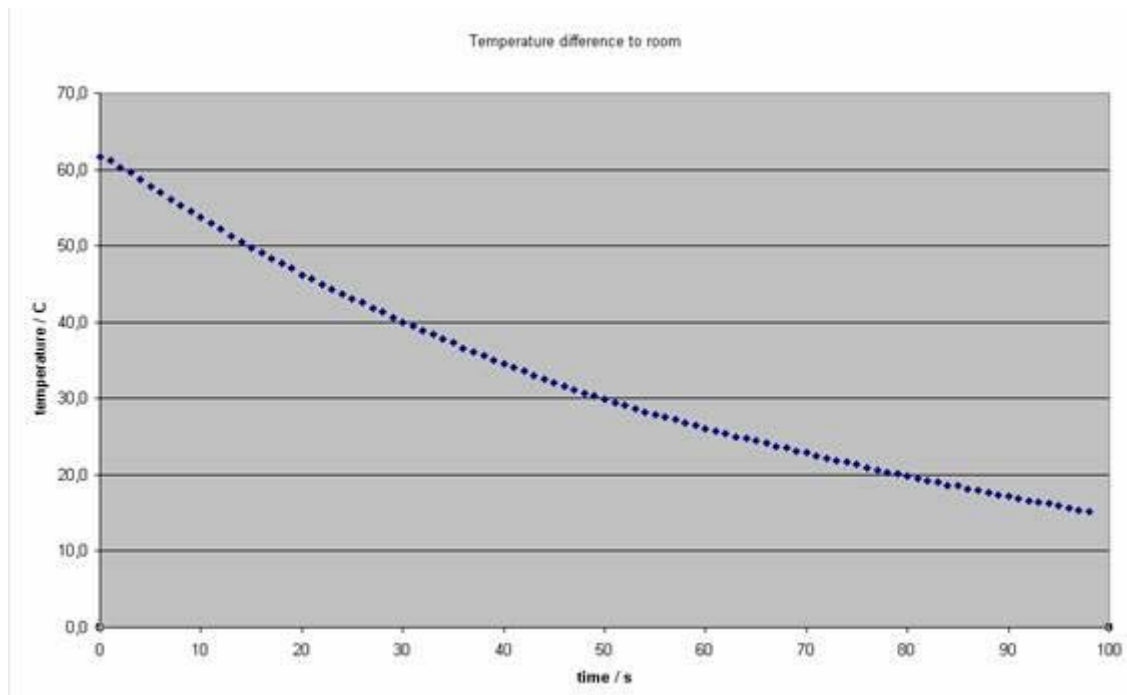


Markieren Sie die Spalte C und rufen Sie den Diagramm-Assistenten auf. Wählen Sie als Diagrammtyp: Standardtyp - Punkt(xy).

Wählen Sie *Weiter*. In dem dann folgenden Schritt klicken Sie das Register "Reihe" an und geben die Bezüge zu den x-Werten ein, die in A2:A100 sind.

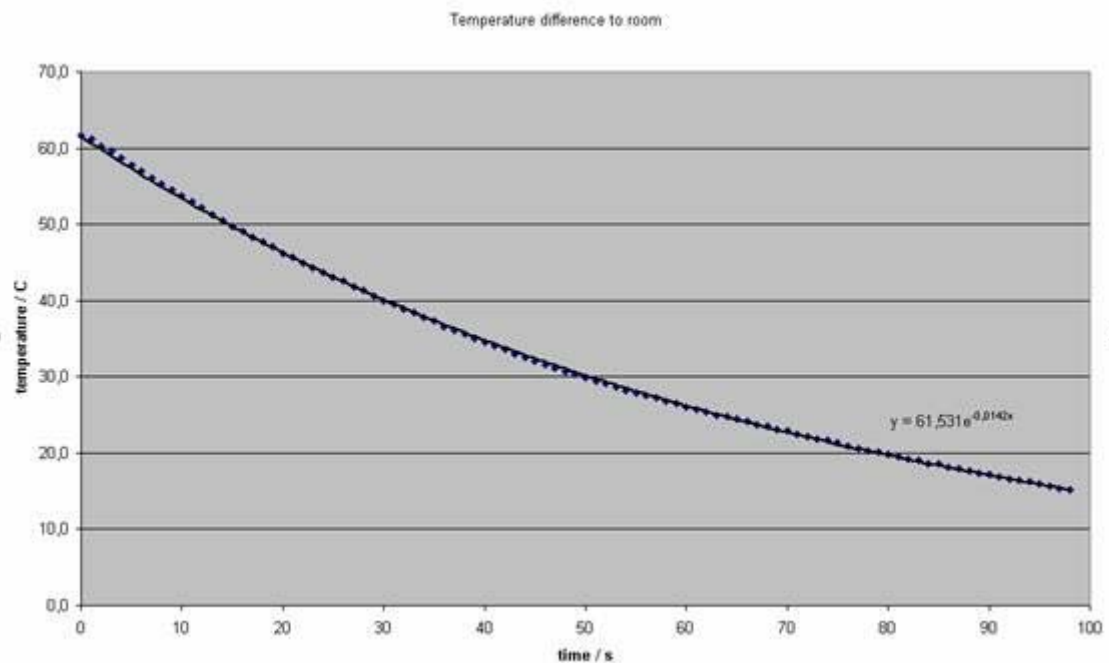


Es entsteht daraus der Graph:



Die Abkühlungsrate ist höher, wenn die Differenz der Raum- zu der Umgebungstemperatur höher ist. Ebenso können wir sehen, dass es begründet ist, eine exponentielle Abhängigkeit anzunehmen.

Um die Regressionskurve anzupassen, klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen der Datenpunkte. Wählen Sie "Trendlinie hinzufügen". Wählen Sie in "Regressionsstypen" den Befehl "Exponentiell". In demselben Fenster wählen Sie dann das Register "Optionen" den Befehl "Gleichung im Diagramm darstellen" aus.



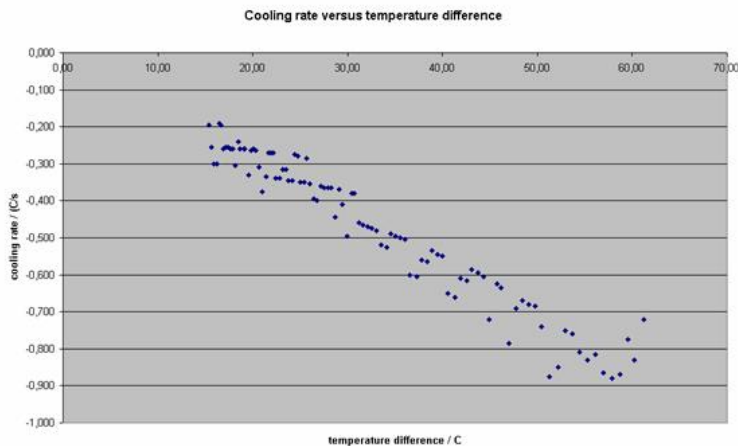
Die Funktion, die die Daten bestimmt ist $y = 61,5 * e^{0,0142x}$ wobei y die Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur ist und x die Zeit.

Geben Sie jetzt die Formel $= (C4 - C2) / (A4 - A2)$ in Zelle D3 ein..

Kopieren Sie diese Formel in der Spalte D bis D99.

Stellen sie die Abkühlungsrate als Funktion der Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur dar.

A10						
D3				=(C4-C2)/(A4-A2)		
	A	B	C	D	E	F
	time / s	temperature	temperature difference	cooling rate		
1						Room temperature
2	0	80,7	61,7			19
3	1	80,2	61,2	-0,72		
4	2	79,3	60,3			
5	3	78,6	59,6			
6	4	77,7	58,7			
7	5	76,8	57,8			

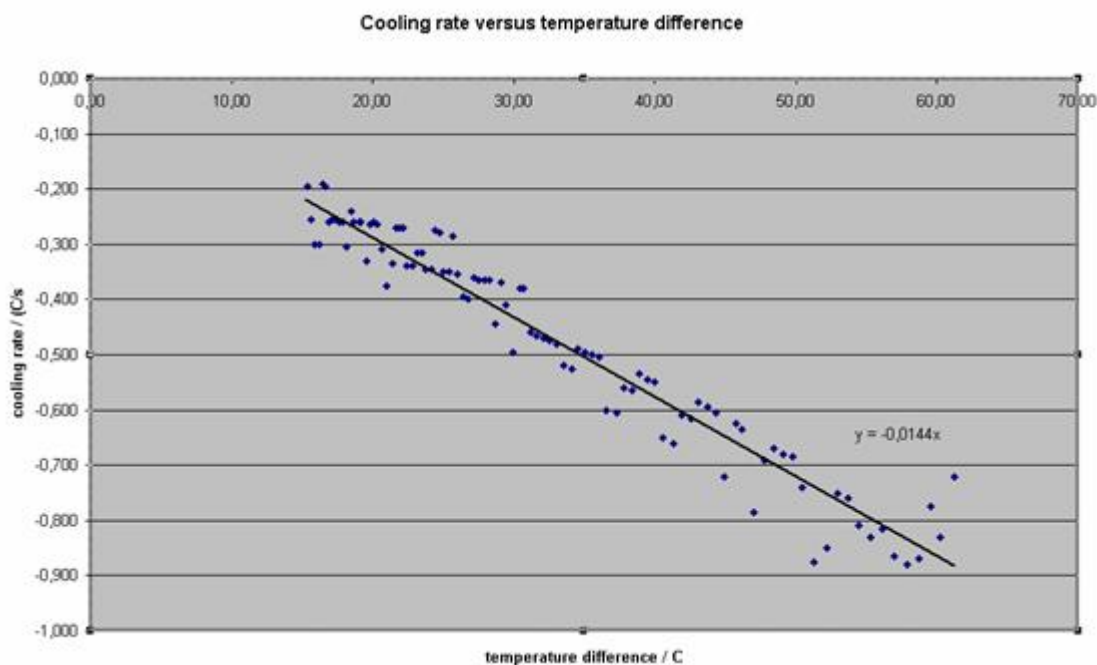


Die Genauigkeit der Messungen ist nicht hoch genug, um eine schöne Darstellung zu bekommen.

Aber tendenziell könnte eine lineare Funktion durch den Ursprung zu den Daten passen.

Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf einen der Datenpunkte, um eine Trendlinie hinzuzufügen. Wählen Sie "Linear" und in "Optionen", dass eine schmale Linie durch den Ursprung geht und die Gleichung im Diagramm

angezeigt werden soll.



Die Gleichung der linearen Funktion ist $y = -0,0144x$ was bedeutet, dass die Abkühlungsrate $-0,0144 \text{ °C/s je Grad Temperaturdifferenz zur Umgebung}$ ist, z.B. $-0,0142 \text{ s}^{-1}$.

Die Abkühlungsrate kann als Ableitung $\frac{dT_c}{dT}$ ausgedrückt werden.

Daher können wir die Gleichung $\frac{dT_c}{dT} = -k(T_c - T_0)$ notieren (mit $k = 0,0142 \text{ 1/s}$)

T_c ist die Temperatur in °C und T_0 die Raumtemperatur.

Die Abkühlungsrate verhält sich proportional zu der Differenz der Temperatur zwischen dem Objekt und der Umgebung. Die Gleichung ist das **Newtonsche Abkühlungsgesetz**.