

# Das Spielzeugauto auf der schiefen Ebene



In diesem Experiment soll die Bewegung eines Körpers auf der schiefen Ebene untersucht werden. Dazu werden die Positionsdaten sowie die Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte eines auf einer schiefen Ebene auf- und abwärts fahrenden Spielzeugautos in Abhängigkeit von der Zeit erfasst und analysiert.



Diese pdf-Datei enthält den Inhalt der Webseite in folgender Reihenfolge

- Theoretisches Modell
- Versuchsaufbau und -durchführung
- Beispieldaten
- Auswertung mit dem TI 83
- Auswertung mit MS Excel

## Theoretisches Modell

### 1) Bewegung ohne Reibung

Wenn die Betrachtung des Spielzeugautos auf die Bewegung seines Massenschwerpunktes entlang der schiefen Ebene reduziert wird, so ist die gesamte Kraft, die auf diesen Schwerpunkt wirkt,  $m g \sin \Phi$  und der erwartete Wert der Beschleunigung ist

$$a_t = g \sin \square$$

wobei  $\square$  der Neigungswinkel ist, der errechnet werden kann, indem man die gegebene Ebenenlänge  $L$  und -höhe  $h$  in folgende Formel einsetzt:

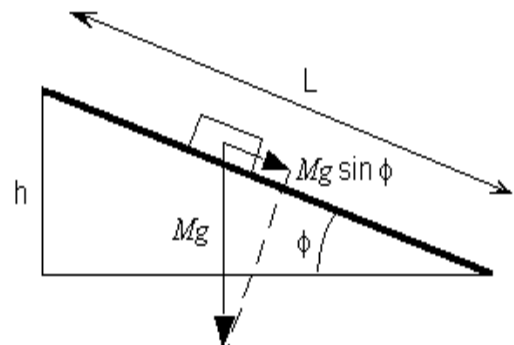
$$\sin \square = h / L$$

Die Unsicherheit im erwarteten Wert hängt von der Genauigkeit der Messungen von  $L$  und  $h$  ab.

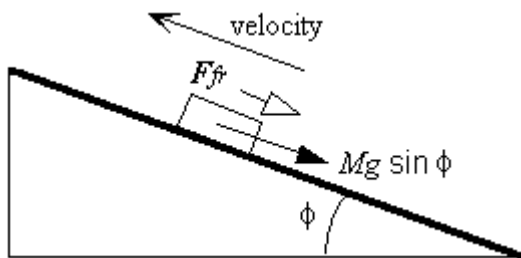
$$\Delta a_t / a_t \simeq \Delta h / h + \Delta L / L$$

Besondere Aufmerksamkeit sollte der Messung von  $h$  beigemessen werden. Ein systematischer Fehler kann sich aus der ungeprüften Annahme, dass die Referenzebene horizontal ist, ergeben (siehe Notiz).

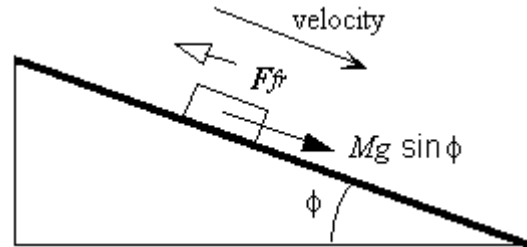
### 2) Bewegung mit Reibung



Wenn Reibung nicht zu vernachlässigen ist, wird die Beschleunigung während der Aufwärts- und Abwärtsbewegung anders sein. Die Reibungskraft richtet sich immer der Geschwindigkeit des Autos auf der schiefen Ebene entgegen. Daher addiert man sie zur Schwerkraftkomponente, wenn sich das Auto aufwärts und subtrahiert sie, wenn sich das Auto abwärts bewegt.



$$F_{\text{aufwärts}} = mg \sin \phi + F_{fr} \quad a_{\text{aufwärts}} = a_g + a_{fr}$$



$$F_{\text{abwärts}} = mg \sin \phi - F_{fr} \quad a_{\text{abwärts}} = a_g - a_{fr}$$

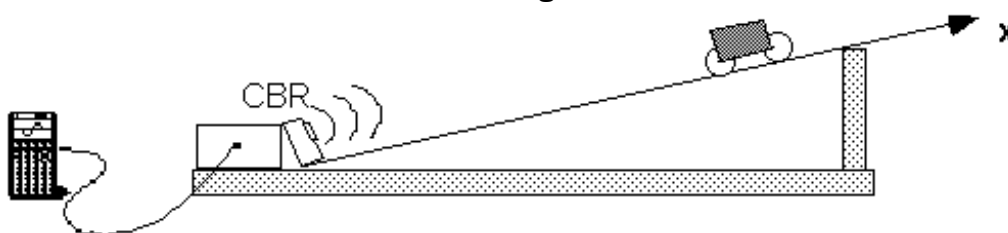
Daher gilt:

- $g \sin \phi = (a_s + a_d)/2$
- $a_{fr} = (a_s - a_d)/2$

## Versuchsaufbau und Durchführung

Um das Experiment durchzuführen, brauchen Sie folgende Gegenstände:

- Schiefe Ebene (z.B. einen Buchdeckel oder einen anderen geeigneten Gegenstand aus dem Physiklabor)
- Spielzeugauto (oder einem kleinen Handwagen mit leichten Rädern)
- Grafikrechner TI-83plus
- Entfernungsmesser "Ranger" (wird am unteren Ende der Steigung angebracht)
- Schwarzes Kabel, um den Grafikrechner mit Ranger zu verbinden



Bevor Sie mit dem Experiment beginnen, müssen Sie überprüfen, ob das Programm "Ranger" auf Ihrem Grafikrechner installiert ist, indem Sie durch die Programmliste scrollen. Wenn nötig, können Sie das Programm vom Bewegungsmelder herunterladen

Jetzt fahren Sie mit den folgenden Schritten fort

- Verbinden Sie Ranger mit dem Rechner, indem Sie das schwarze Kabel benutzen (vergewissern Sie sich, dass das Kabel mit beiden Geräten fest verbunden ist)
- Bauen Sie den Rechner für die Messung auf und stellen Sie ihn auf Time-Graph ein (siehe nächster Abschnitt).
- Schieben Sie das Auto die Steigung hoch und beginnen Sie mit der Messung.

# Vorbereitung des Rechners und Messung

Wählen Sie aus dem Hauptmenü 1: SETUP/SAMPLE

Im Hauptmenü wählen Sie 1:SETUP/SAMPLE.

Wählen Sie die Einstellungen folgendermaßen:

REALTIME:NO

TIME(S):2

DISPLAY: DIST

BEGIN ON: ENTER

SMOOTHING: NONE

UNITS: METERS

Mit dieser Auswahl wird eine 2 Sekunden dauernde Messung durchgeführt. Zum Ende der Messung werden die gewonnen Daten in einem Weg-Zeit-Diagramm dargestellt.

Nach einem ersten Versuch werden Sie vielleicht feststellen, dass für einen bestimmten Experimentaufbau eine andere Auswahl der Messdauer geeigneter wäre. Ändern Sie dann einfach die Messdauer im SETUP/SAMPLE-Menü.

Jetzt wählen Sie START NOW und drücken ENTER um die Messung zu starten.

Am Schluss werden die Daten vom Ranger auf den Rechner übertragen. Das Weg-Zeit-Diagramm erscheint auf dem Bildschirm.

## Beispieldaten

Beispieldaten sind in verschiedenen Formaten als Download verfügbar:

Dateien für einen graphischen Taschenrechner (erstellt mit einem TI 83):

Zeit: time.8XI

Position: pos.8XI

Geschwindigkeit: vel.8XI

Beschleunigung: acc.8XI

Erstellt wurden diese Dateien mit dem Programm RANGER. Sie können mit der TI-Connect-Software geöffnet (Lesen der Daten) und von Ihrem PC auf einen graphischen Taschenrechner mit einem TI-GraphLink Kabel (grau, schwarz or USB) übertragen werden.

Dateien für einen graphischen Taschenrechner (erstellt mit einem TI 89): incline.89c

Erstellt wurden diese Dateien mit dem Programm SCIENCE. Sie können mit der TI-Connect-Software geöffnet (Lesen der Daten) und von Ihrem PC auf einen graphischen Taschenrechner mit einem TI-GraphLink Kabel (grau, schwarz oder USB) übertragen werden.

MS-Excel-Datei: TOY.xls

# Anleitung zur Datenanalyse

Zur Analyse der erfassten Daten schlagen wir folgende Schritte vor:

## 1. Untersuchen Sie die Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Diagramme

- Prüfen Sie die Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme und versuchen Sie die Fragen zu beantworten, indem Sie die Graphen untereinander vergleichen:
  - Können Sie das Intervall, das zur Auf- und Abwärtsbewegung gehört, im Positionsdiagramm finden? Im Geschwindigkeitsdiagramm auch?
  - Kann der Graph im Geschwindigkeitsdiagramm durch eine Gerade angenähert werden? Warum ist die Steigung negativ?

## 2. Bestimmen Sie den Wert der Beschleunigung

- Berechnen Sie die Beschleunigung bei der Auf- und Abwärtsbewegung. Benutzen Sie dazu die Regressionsgeraden der Beschleunigungsmessung

Um den Beschleunigungswert herauszufinden, betrachten Sie den entsprechenden Ausschnitt in dem Geschwindigkeitsdiagramm (die geschätzte Gerade mit negativer Steigung). Fügen Sie anschließend die Regressionsgerade hinzu.

Eine genauere Analyse des Geschwindigkeitsdiagramms legt nahe, dass die Beschleunigung unterschiedliche Werte hat, je nachdem, ob das Spielzeugauto sich auf- oder abwärts bewegt. In diesem Fall sollten zwei unterschiedliche Diagrammausschnitte getrennt ausgewählt und entsprechend zwei getrennte Regressionsberechnungen durchgeführt werden. Der Mittelwert beider Ergebnisse sollte mit der Komponente der Beschleunigung durch die Schwerkraft parallel zu der Bewegungsrichtung korrespondieren (siehe Theoretisches Modell).

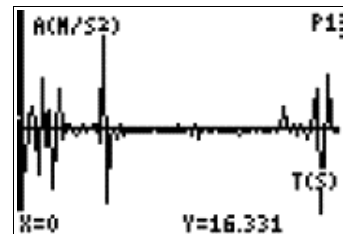
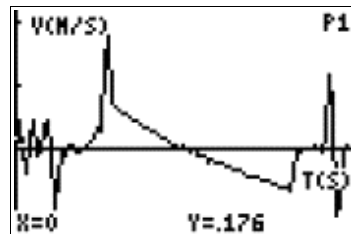
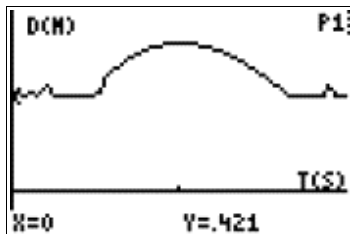
## 3. Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Werten der Beschleunigung

In der Annahme, dass der Körper sich wie eine Punktmasse verhält, können wir den theoretisch angenommenen Wert der Beschleunigung berechnen und ihn mit unseren experimentellen Werten vergleichen. Wenn nicht: Was könnte der Grund für die Differenz sein?

Unsere Berechnung der Beschleunigung, indem eine Regressionsgerade in dem Geschwindigkeitsdiagramm erstellt wird, ist im Allgemeinen üblich. Der auszuwählende Teil des Graphen ist so leichter zu identifizieren. Sie können auch versuchen den Beschleunigungswert mit dem Positionsdiagramm (quadratische Regression) oder mit dem Beschleunigungsdiagramm zu berechnen (Mittelwert bei dem selben Zeitintervall). Die Werte sollten miteinander übereinstimmen.

# Vollständige Datenanalyse mit dem TI 83

Sie werden wahrscheinlich ähnliche Grafiken wie die unten abgebildeten erhalten.



Der mittlere Teil des Graphen ist nicht symmetrisch. Deshalb hat das Spielzeugauto nicht den selben Beschleunigungswert, während es auf- und abwärts fährt. Trotzdem könnte es wichtig sein, eine Berechnung der Regressionsgeraden durchzuführen, indem alle Daten gleichzeitig ausgewählt werden. Denn zuerst haben wir angenommen, dass der Beschleunigungswert immer gleich sei, um zu betonen, dass als erste Annahme der Beschleunigungswert gleich sein sollte.

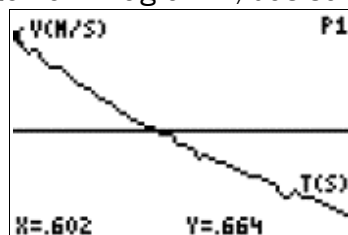
Hier sind die Schritte zur Datenauswahl:

```
MAIN MENU
1: SETUP/SAMPLE
2: SET DEFAULTS
3: APPLICATIONS
4: PLOT MENU
5: TOOLS
6: QUIT
```

```
PLOT MENU
1: DIST-TIME
2: VEL-TIME
3: ACCEL-TIME
4: PLOT TOOLS
5: REPEAT SAMPLE
6: MAIN MENU
7: QUIT
```

```
PLOT TOOLS
1: SELECT DOMAIN
2: SMOOTH DATA
3: PLOT MENU
```

Auf dem Bildschirm werden Sie aufgefordert zuerst die unteren und dann die oberen Grenzwerte einzugeben. Sie erhalten ein Diagramm, das so ähnlich aussieht wie:



Um die lineare Regression berechnen zu können, müssen Sie das Ranger-Programm verlassen und die Regressions-Berechnungshilfen des TI-83 benutzen. Drücken Sie STAT und wählen Sie CALC. Dann erscheint ein Menü, in dem Sie 4:LinReg(  $ax+b$  ) wählen können. Wenn Sie L1 als X und L3 als y eingeben, erhalten Sie für die Musterdaten:

```
LinReg(ax+b) L1,
L3
```

```
LinReg
y=ax+b
a=-1.260331277
b=1.315036181
```

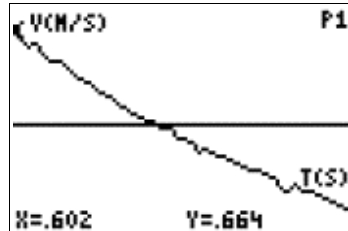
a = - 1.26 m/s<sup>2</sup>

Dieser Wert soll mit dem erwarteten Wert verglichen werden. Im Falle dieses Experimentes hatten wir  $\sin\alpha = h/L = 0,133$  mit ungefähr 1% Abweichung. Daher ist der erwartete Wert

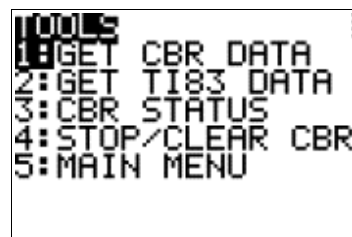
$$a_t = g \sin\alpha = - (1,30 \pm 0,01) \text{ m/s}^2$$

Er stimmt nicht ganz mit dem experimentellen Ergebnis überein.

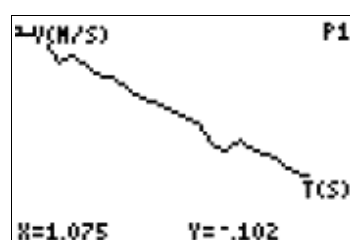
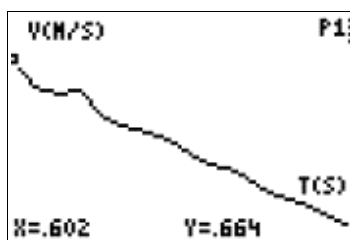
Eine nähere Untersuchung des Geschwindigkeitsdiagramms zeigt uns, dass es sich um zwei verschiedene Geraden handelt, die sich treffen, wenn der Wert der Geschwindigkeit gleich Null ist.



Die zwei unterschiedlichen Steigungen können berechnet werden, indem die beiden Zeitintervalle getrennt ausgewählt werden. Um die Auswahl der Reihe noch zweimal durchzuführen, sollten Sie die Originaldaten vom CBR (oder von der Originalliste, wenn Sie sie unter unterschiedlichen Namen kopiert und abgespeichert haben) hochladen, indem Sie folgende Schritte beachten:



Mit den Musterdaten ergeben sich die ausgewählten Ausschnitte des Geschwindigkeitsgraphen und die beiden dazugehörigen Beschleunigungswerten wie folgt:



LinReg  
y=ax+b  
a=-1.625999472  
b=1.613177176

LinReg  
y=ax+b  
a=-.9953910555  
b=.9640031457

$$a_{up} = -1.63 \text{ m/s}^2$$

$$a_{down} = -0.99 \text{ m/s}^2$$

Der Mittelwert (d.h. der Anteil der Beschleunigung, der auf die Schwerkraft zurückzuführen ist) ist daher

$$a_m = (a_{up} + a_{down}) / 2 = (a_g + a_{fr} + a_g - a_{fr}) / 2 = a_g = -1.31 \text{ m/s}^2.$$

Eine grobe Schätzung der Reibung erhält man durch Betrachtung der Abnahme der Beschleunigung:

$$a_{fr} = (a_{up} - a_{down}) / 2 = - 0.32 \text{ m/s}^2$$

Der Beschleunigungswert ist in Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert:  $[- (1.30 \pm 0.01) \text{ m/s}^2]$ .

Beachten Sie, dass dieser Wert mit dem erhaltenen Wert einer einzelnen Regressionsberechnung zweier Datenreihen nur zusammenfallen würde, wenn die Anzahl der Daten in beiden Fällen dieselbe wäre. Daher sind zwei getrennte Regressionsberechnungen im Allgemeinen besser, um abzusichern, dass das selbe Gewicht den Auf- und Abwärtsbewegungen zugeordnet wird.

Die Abweichungen zwischen erwarteten und gemessenen Werten der Beschleunigung können von folgenden Rahmenbedingungen des Experiments und der Messung abhängen:

1. die Messung von  $a$  muss möglichst exakt erfolgen (bereits kleine Abweichungen können merkbar den Wert der erwarteten Beschleunigung beeinflussen; siehe [Anmerkung](#))
2. Die Masse der Räder ist nicht nebensächlich, wenn sie im Verhältnis zur Masse des Spielzeugautos gesetzt wird (in diesem Fall sollte die Rotationsbewegung der Räder mit berechnet werden).

## Anleitung zur Datenanalyse mit MS-Excel

Die aus diesem Experiment gewonnenen Daten können in Excel importiert werden, indem Sie das TI-Graph-Link-Verbindungskabel und die TI Verbindungs-Software (z.B. TI Connect) benutzen.

Zur Analyse der erfassten Daten schlagen wir folgende Schritte vor:

### 1. Untersuchen Sie die Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Diagramme

- Prüfen Sie die Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramme und versuchen Sie die Fragen zu beantworten, indem Sie die Graphen untereinander vergleichen:
  - Können Sie das Intervall, das zur Auf- und Abwärtsbewegung gehört, im Positionsdiagramm finden? Im Geschwindigkeitsdiagramm auch?
  - Kann der Graph im Geschwindigkeitsdiagramm durch eine Gerade angenähert werden? Warum ist die Steigung negativ?

### 2. Bestimmen Sie den Wert der Beschleunigung

- Berechnen Sie die Beschleunigung bei der Auf- und Abwärtsbewegung. Benutzen Sie dazu die Regressionsgeraden der Beschleunigungsmessung

Um den Beschleunigungswert herauszufinden, betrachten Sie den entsprechenden Ausschnitt in dem Geschwindigkeitsdiagramm (die geschätzte Gerade mit negativer Steigung). Fügen Sie anschließend die Regressionsgerade hinzu.

Eine genauere Analyse des Geschwindigkeitsdiagramms legt nahe, dass die Beschleunigung unterschiedliche Werte hat, je nachdem, ob das Spielzeugauto sich auf- oder abwärts bewegt. In diesem Fall sollten zwei unterschiedliche Diagrammausschnitte getrennt ausgewählt und entsprechend zwei getrennte Regressionsberechnungen durchgeführt werden. Der Mittelwert beider Ergebnisse sollte mit der Komponente der Beschleunigung durch die Schwerkraft parallel zu der Bewegungsrichtung korrespondieren (siehe Theoretisches Modell).

### 3. Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Werten der Beschleunigung

In der Annahme, dass der Körper sich wie eine Punktmasse verhält, können wir den theoretisch angenommenen Wert der Beschleunigung berechnen und ihn mit unseren experimentellen Werten vergleichen. Wenn nicht: Was könnte der Grund für die Differenz sein?

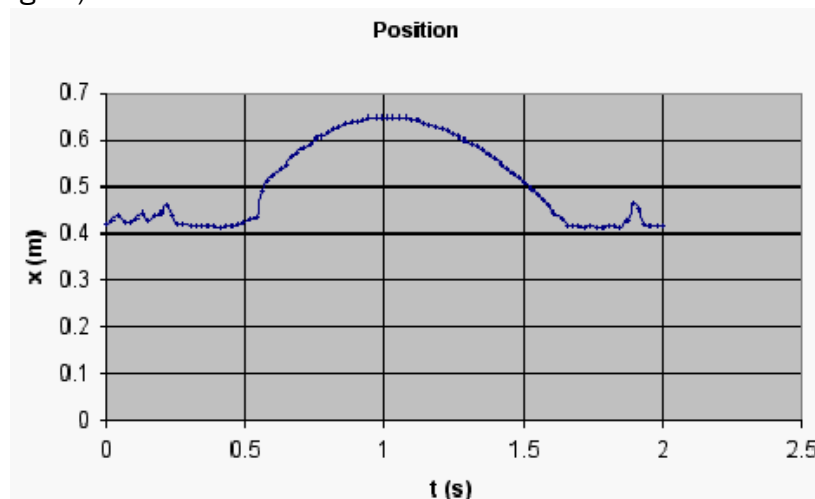
Unsere Berechnung der Beschleunigung, indem eine Regressionsgerade in dem Geschwindigkeitsdiagramm erstellt wird, ist im Allgemeinen üblich. Der auszuwählende Teil des Graphen ist so leichter zu identifizieren. Sie können auch versuchen den Beschleunigungswert mit dem Positionsdiagramm (quadratische Regression) oder mit dem Beschleunigungsdiagramm zu berechnen (Mittelwert bei dem selben Zeitintervall). Die Werte sollten miteinander übereinstimmen.

## Vollständige Datenanalyse mit MS-Excel

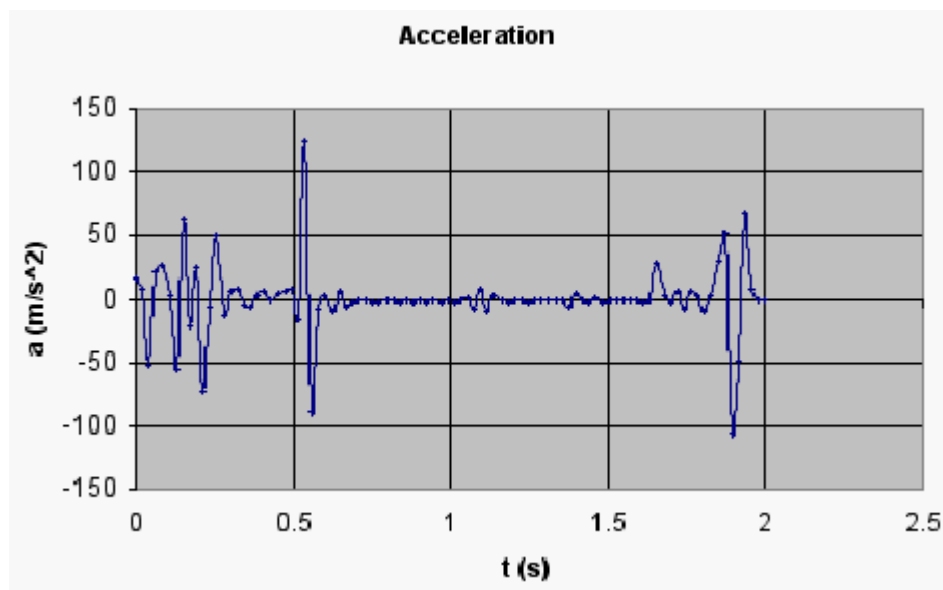
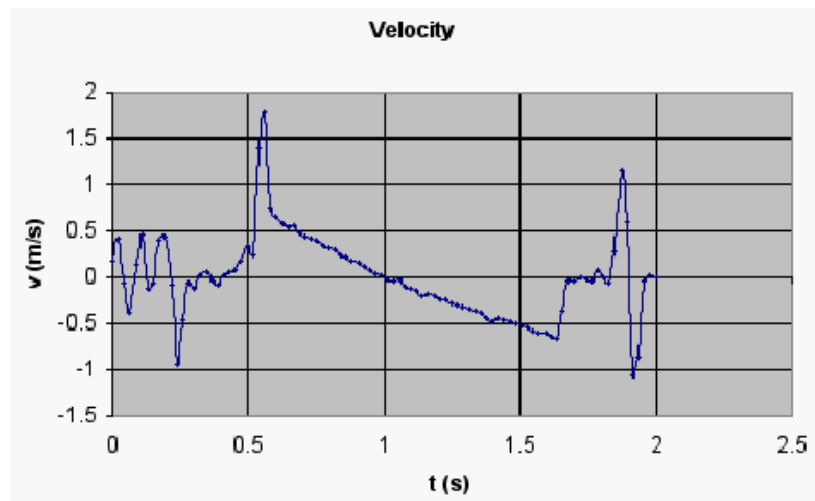
Die Bewegungsdaten unseres Experiments wurden in die Datei Toy.xls exportiert.

Die Zeitwerte (in Sekunden) sind in Spalte A, Entfernung (in Metern) in Spalte B, Geschwindigkeit (in m/s) in Spalte C, Beschleunigung (in m/ s<sup>2</sup>) in Spalte D.

Bei der Anwendung dieser Daten werden Sie Kurven ähnlich den unten abgebildeten erhalten. (Wenn Sie dabei Hilfe brauchen, sehen Sie sich das Modul Experimentelle Versuche und Kurvenannäherung an)







Der mittlere Teil der Positionskurve ist nicht symmetrisch. Folglich ist die Beschleunigung, wenn das Spielzeugauto auf- oder abwärts fährt, nicht gleich. Trotzdem könnte es wichtig sein, eine Berechnung der Regressionsgeraden durchzuführen, indem alle Daten gleichzeitig ausgewählt werden. Denn zuerst haben wir angenommen, dass der Beschleunigungswert immer gleich sei.

Selektieren Sie die Daten, die die Auf- und Abwärtsbewegung beschreiben.

Jetzt sollten Sie die Regressionskurve berechnen.

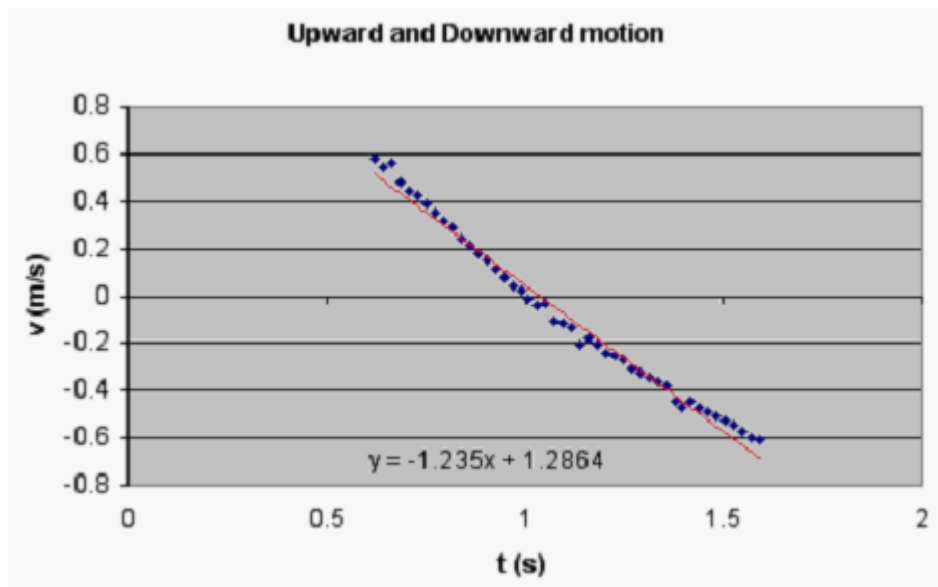
(Wenn Sie Hilfe benötigen, sehen Sie sich das Modul [experimentelles Testen und Kurvenanpassung](#) an)

Der berechnete Wert für die Beschleunigung beträgt:

$$a = -1,24 \text{ m/s}^2$$

Dieser Wert soll mit dem theoretisch angenommenen Wert verglichen werden.

Im Falle dieses Experimentes hätten wir:



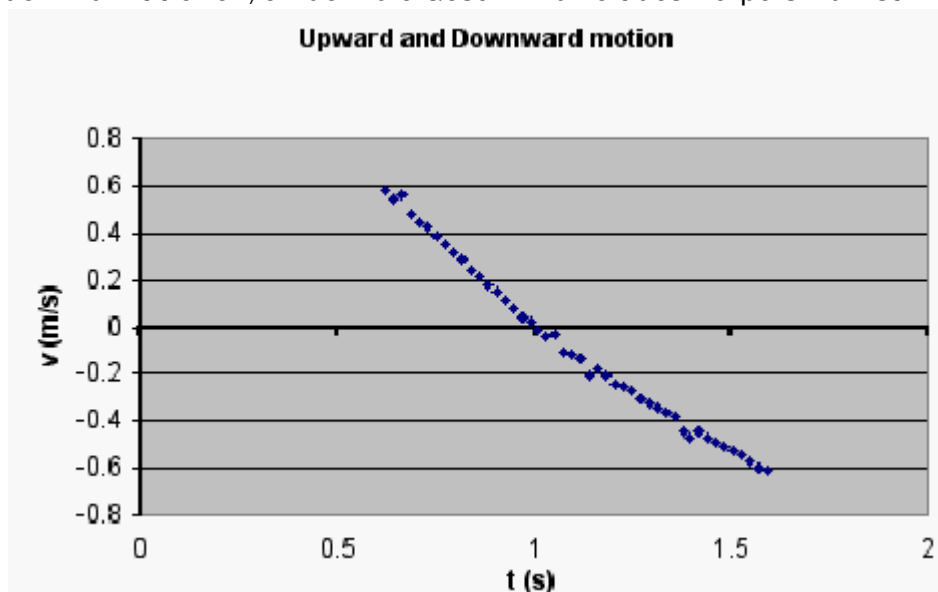
$\sin \alpha = h/L = 0,133$  mit ungefähr 1% Abweichung.

Daher stimmt der angenommene Wert

$$a_t = g \sin \alpha = -(1,30 \pm 0,01) \text{ m/s}^2$$

nicht ganz mit dem experimentellen Wert überein.

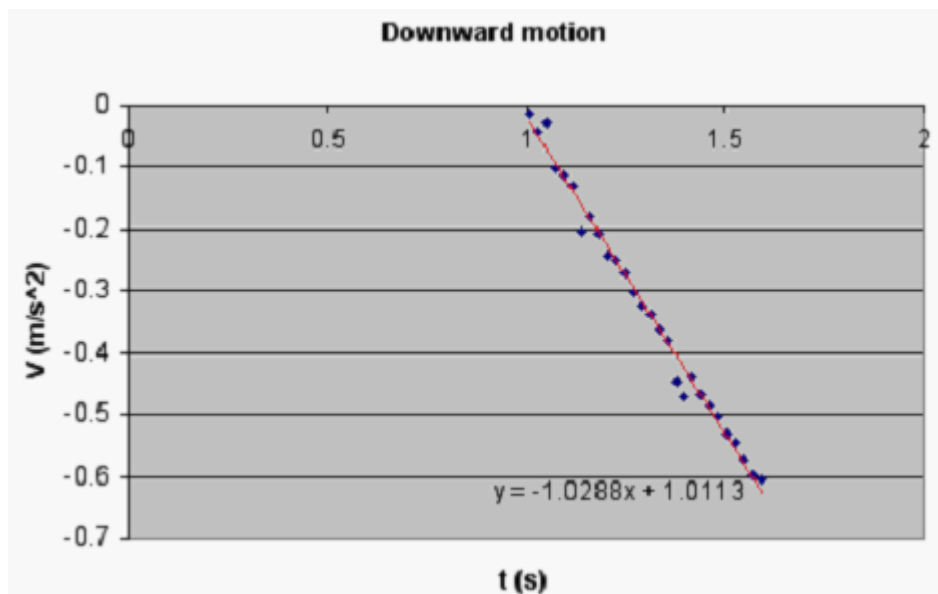
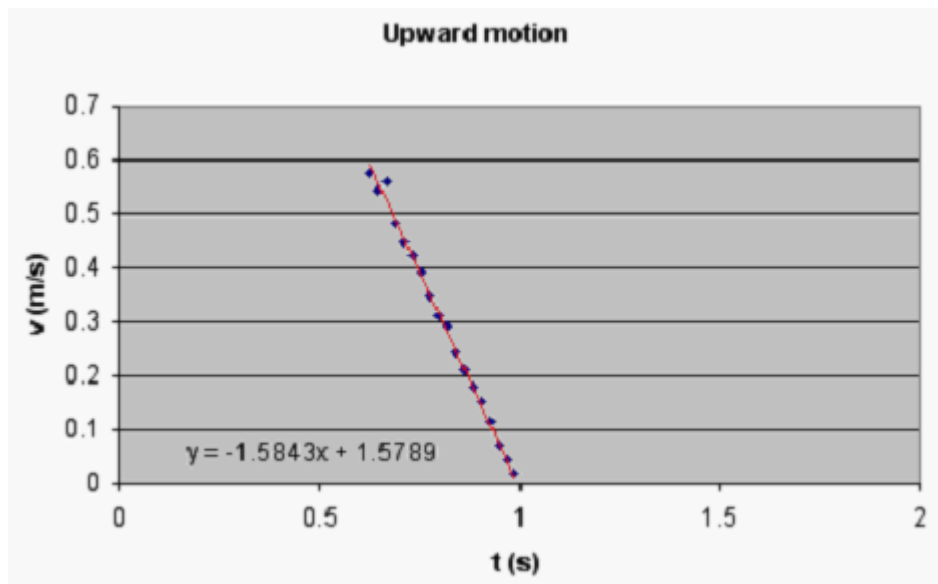
Eine nähere Betrachtung der Geschwindigkeitsgrafik zeigt, dass sich zwei verschiedene Geraden an dem Punkt treffen, an dem die Geschwindigkeit des Körpers Null ist.



Die zwei unterschiedlichen Steigungen können berechnet werden, indem die beiden Zeitintervalle getrennt ausgewählt und zwei getrennte Regressionsgeraden erstellt werden.

(Wenn Sie Hilfe benötigen, sehen Sie sich das Modul experimentelles Testen und Kurvenanpassung an)

Mit den Muster-Daten ergeben sich die beiden ausgewählten Ausschnitte der Geschwindigkeitsgrafik und den korrespondierenden zwei Werten für die Beschleunigung wie folgt:



Wir erhalten daher die entsprechenden Beschleunigungswerte:

$$a_{up} = -1,58 \text{ m/s}^2 \quad a_{down} = -1,03 \text{ m/s}^2$$

der Mittelwert (d.h. den Teil der Beschleunigung, der gravitationsabhängig ist) ist daher:

$$a_m = (a_{up} + a_{down}) / 2 = (a_g + a_{fr} + a_g - a_{fr}) / 2 = a_g = -1,31 \text{ m/s}^2$$

Eine grobe Schätzung der Reibung erhält man durch Betrachtung der Beschleunigungsverringerung:

$$a_{fr} = (a_{up} - a_{down}) / 2 = -0,55 \text{ m/s}^2$$

Der Beschleunigungswert ist in Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert:  $[-(1,30 \pm 0,01) \text{ m/s}^2]$ .

Beachten Sie, dass dieser Wert mit dem erhaltenen Wert einer einzelnen Regressionsberechnung zweier Datenreihen nur zusammenfallen würde, wenn die Anzahl der Daten in beiden Fällen dieselbe wäre. Daher sind zwei getrennte Regressionsberechnungen im

Allgemeinen besser, um sicher zu stellen, dass dasselbe Gewicht den Auf- und Abwärtsbewegungen zugeordnet wird.

Beachten Sie, dass die Messung von  $\alpha$  möglichst exakt erfolgen muss (bereits kleine Abweichungen können merkbar den Wert der erwarteten Beschleunigung beeinflussen; siehe Anmerkung)

- Die Masse der Räder ist nicht zu vernachlässigen, wenn sie im Verhältnis zur Masse des Spielzeugautos bedeutend ist (in diesem Fall sollte die Rotationsbewegung der Räder mitberechnet werden).