

Legge del Raffreddamento di Newton



Obiettivo

L'obiettivo di questo esperimento è studiare l'andamento temporale della temperatura di un oggetto che si raffredda e trovare un modello matematico che lo descriva.

Contenuti

Apparato Sperimentale e Acquisizione Dati (TI83)
Analisi Dati (TI83)
Analisi Dati (Excel)
Analisi Dati completa (TI83)
Analisi Dati completa (Excel)

Apparato Sperimentale ed Acquisizione Dati

Materiali

Un thermos pieno d'acqua molto calda, una sonda di temperatura, CBL e TI-83. Invece dell'acqua calda si può usare in asciugacapelli.

Procedura

- Innanzitutto occorre verificare che sulla calcolatrice TI-83 sia presente i programmi [TEMP](#) e [CLEAN](#), che possono essere scaricati. Se occorre trovi sul CD o sul sito le istruzioni.
- Connetti la sonda di temperatura nel canale 1 al CBL ed il CBL alla calcolatrice.
- Immergi la sonda nell'acqua calda facendo attenzione a non metterla in contatto con il bollitore o riscaldala con l'asciugacapelli.
- Avvia il programma TEMP sulla calcolatrice.
- Scegli AUTO per la scala e scegli il numero di campionamenti, per esempio 1 per secondo.
- Tira fuori la sonda dall'acqua, scuotila rapidamente per eliminare l'acqua, asciuga lo stelo rapidamente e quindi premi ENTER; se usi l'asciugacapelli allontanala dal flusso d'aria e premi ENTER.
- Quando l'esperimento è terminato sul monitor compare il grafico della temperatura($^{\circ}\text{C}$) in funzione del tempo(s). I dati relativi alla temperatura sono registrati nella lista L_2 e gli istanti di tempo nella lista L_1 .
- ricordati di misurare e prendere nota della temperatura ambiente.

Se non sei in grado di fare l'esperimento sul CD o sul sito puoi trovare i nostri dati sperimentali.

- Puoi trasferire i dati sulla tua TI83 o TI83 Plus.

Analisi Dati (TI 83)

Se ti occorre, troverai qualche suggerimento per l'uso della calcolatrice nei collegamenti evidenziati in colore blu nel CD o sul sito.

- Visualizza il grafico della temperatura in funzione del tempo scegliendo un grafico a punti ([scatter plot](#)).
- Osserva il grafico. E' come te lo aspettavi? La velocità di raffreddamento hanno un'andamento ragionevole? Sino a quando la temperatura continuerà a diminuire?

L1	L2	L3	3
0	80.69	-----	
1	80.24		
2	79.25		
3	78.58		
4	77.7		
5	76.84		
6	75.94		
L3 = L2 - 19			

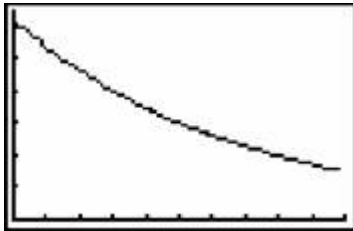
Per poter determinare la funzione che approssima la curva di raffreddamento dobbiamo innanzitutto sottrarre ai valori della temperatura il valore della temperatura ambiente. Questo passaggio è necessario a causa di un limite del software. Suggeriamo di registrare i nuovi valori in una nuova lista in modo da mantenere comunque i dati sperimentali. Posiziona il cursore in cima alla lista L_3 e digita $L_3 = L_2 - \text{"room temp"}$.

- Ora visualizza il grafico della differenza di temperatura della sonda e l'ambiente in funzione del tempo usando la modalità [Scatter plot](#).
- Scegli il tipo di [regressione](#) che ti sembra più adatto ai dati sperimentali e cerca di trarre le conclusioni.
- Per calcolare la velocità di raffreddamento punto per punto possiamo usare lo strumento [dy/dx-function](#). Si trova nel menù CALC (2:nd TRACE) e fornisce la pendenza della funzione. I risultati vengono registrati nel registro answer al quale si può accedere digitando ANS (2:nd (-)). Questi valori si possono facilmente raccogliere in una nuova lista:
 - calcola dy/dx in un punto
 - go to the list editor (STAT Edit)
 - posiziona il cursore su $L_6(1)$ e premi ANS (2:nd (-)). Con questa istruzione i valori della pendenza vengono registrati in una cella.
 - posiziona il cursore in $L_5(1)$ e premi Y (ALPHA 1). Con questa istruzione i valori della differenza di temperatura vengono registrati in una cella
- Visualizza un [scatter plot](#) grafico della differenza di temperatura in funzione del tempo.
- Scegli la [regressione](#) che ti sembra più adatta e prova a trarre le conclusioni.

Quando hai terminato la tua analisi puoi confrontarla con questa l'analisi completa.

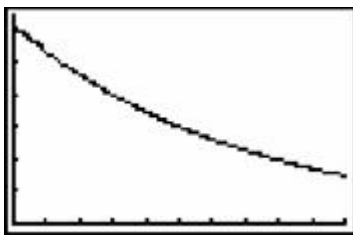
Analisi Dati completa (TI 83)

Dopo che dai valori della temperatura è stato sottratto il valore della temperatura ambiente otteniamo un grafico tipo questo:



Il fatto che la velocità di raffreddamento sia maggiore quando è maggiore la differenza di temperatura con l'ambiente non ci sorprende. E' ragionevole ipotizzare che la curva abbia un andamento esponenziale.

Quindi proviamo un modello esponenziale usando una [regressione esponenziale\(ExpReg\)](#). Questo il risultato:



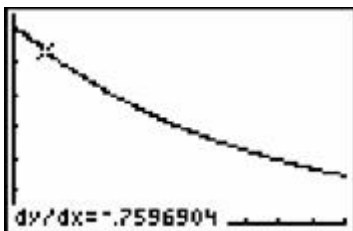
```
ExpReg
y=a*b^x
a=61.53128895
b=.985865652
```

Come si può vedere nella figura a sinistra la curva si accorda quasi perfettamente con i dati sperimentali. La funzione è

$$y = 61.5 \cdot 0.986^x$$

dove y è la differenza di temperatura con la temperatura ambiente ed x gli istanti di tempo.

Per avere informazioni sulla velocità di raffreddamento usiamo [il comando dy/dx](#) sulla calcolatrice, che ci permette di avere il valore della derivata numerica in qualunque punto del grafico.

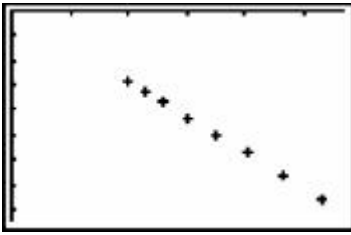


L4	L5	L6	5
53.367	-.7597	-----	
L5(2) = Ans			

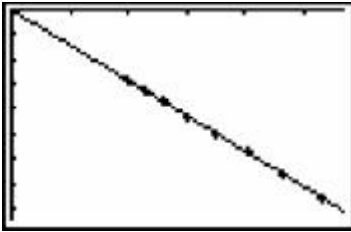
Il valore di dy/dx calcolato nel punto in cui $x = 10$

Il valore di dy/dx si può copiare in una lista usando ANS (2:nd (-)). Nello stesso modo si possono registrare i valori di y usando Y (2:nd 1)

Fatto questo per un certo numero di punti possiamo costruire e visualizzare un grafico [della velocità di raffreddamento \(la derivata\) in funzione della differenza di temperatura](#).



Osservandolo si potrebbe fare l'ipotesi che si tratti di una funzione lineare quindi possiamo provare una [regressione lineare](#) dei dati. Otterremo:



```
LinReg
y=ax+b
a=-.0142351893
b=2.7716E-10
```

L'equazione di una funzione lineare è

$$y = -0.0142 \cdot x$$

che significa che la velocità di raffreddamento è
 $-0.0142 \text{ } ^\circ\text{C/s}$.

La velocità di raffreddamento può essere espressa come una derivata

$$\frac{dT_c}{dt}$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione come:

$$\frac{dT_c}{dt} = -k \cdot (T_c - T_0)$$

con $k = 0.0142 \text{ s}^{-1}$.

T_c è la temperatura in $^\circ\text{C}$ e T_0 la temperatura ambiente.

La velocità di raffreddamento è proporzionale alla differenza di temperatura tra l'oggetto e l'ambiente.

Questa equazione viene detta **Legge del raffreddamento di Newton**.

Analisi Dati (con MS Excel)

I dati sperimentali si possono trasferire dalla calcolatrice al PC con il cavo Graph Link. Per vederli apri il documento [Newtcool](#) in Excel che trovi sul CD o sul sito.

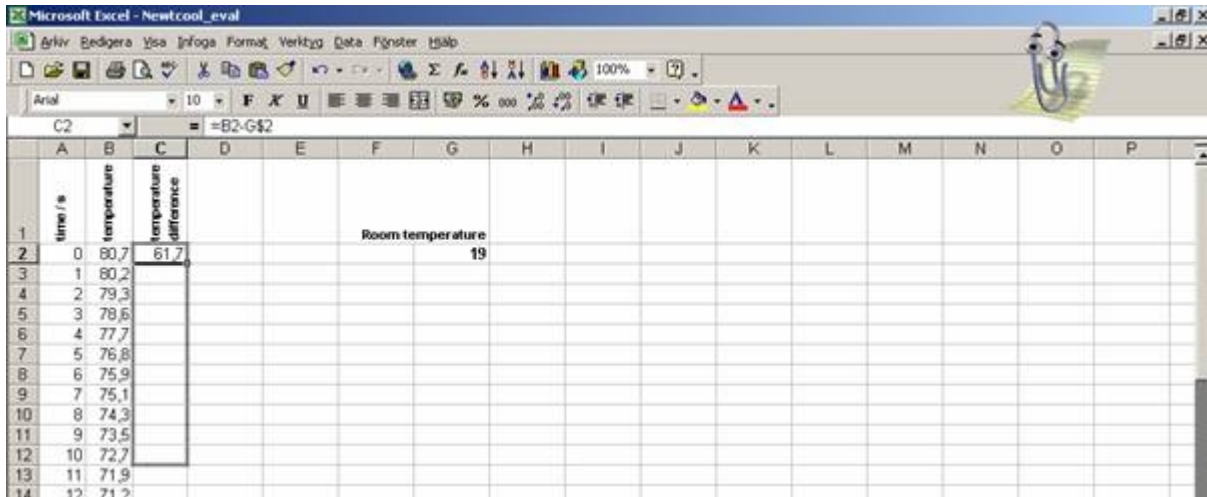
Nella colonna A ci sono gli istanti di tempo (in secondi), nella colonna B le temperature (in °C). La temperatura ambiente si trova nella cella G1.

- Costruisci il grafico della temperatura in funzione del tempo. Se non sai come fare puoi usare la finestra di aiuto [Come fare un grafico a punti in Excel?](#) .
 - Guarda il grafico. E' come te lo aspettavi? La velocità di raffreddamento hanno un'andamento ragionevole? Sino a quando la temperatura continuerà a diminuire?
 - Per poter determinare la funzione che approssima la curva di raffreddamento dobbiamo innanzitutto sottrarre ai valori della temperatura il valore della temperatura ambiente. Questo passaggio è necessario a causa di un limite del software. Suggeriamo di registrare i nuovi valori in colonna C. Porta il cursore nella cella C2 ed inserisci la formula $=B2-G\$2$. Quindi copiala in basso nella colonna C.
 - Adesso costruisci il grafico della differenza di temperatura in funzione del tempo come grafico a punti. Poichè le colonne non sono adiacenti la procedura è un po' diversa dalla precedente. Se non sai come fare puoi usare la finestra d'aiuto ["Come graficare dati su due colonne non adiacenti."](#)
 - Effettua una interpolazione sui dati e cerca di trarre le conclusioni (se non sai come fare trovi delle indicazioni nell'analisi completa).
 - Calcola la velocità di raffreddamento in ognuno dei punti sperimentali calcolando il rapporto su un intervallo simmetrico. Suggeriamo di calcolare questi dati nella colonna D, nell'intervallo D3:D99. Se hai dei dubbi puoi consultare la finestra di aiuto [Come inserire e copiare le formule](#) .
 - Costruisci un grafico a punti della velocità di raffreddamento in funzione della differenza di temperatura rispetto alla temperatura ambiente.
 - Osserva attentamente il grafico, considerando anche i limiti dovuti all'accuratezza della misura. Prova a ipotizzare una funzione che possa interpolare i dati. La funzione deve passare per l'origine degli assi cartesiani: se non c'è differenza di temperatura non c'è raffreddamento.
 - Adesso prova a trarre le conclusioni di questo esperimento.
- Quando hai fatto la tua analisi ma non prima, puoi vedere un'analisi completa.

Analisi Dati (Excel)

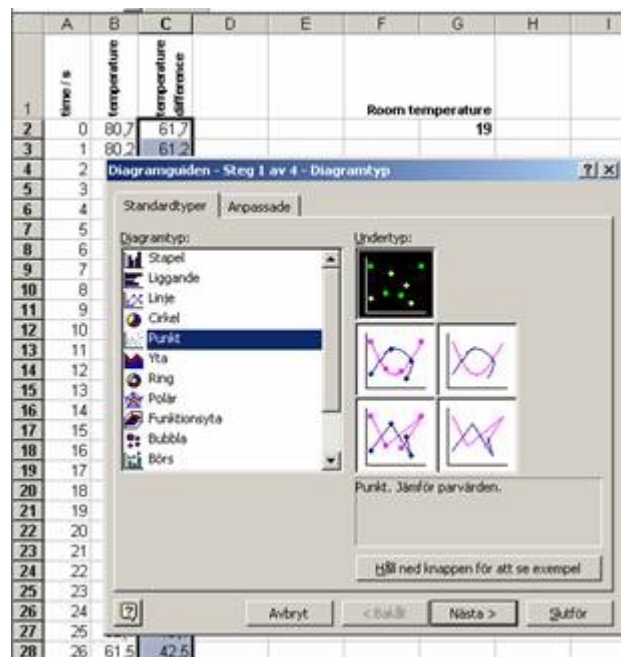
Scrivi il titolo della colonna nella cella C1.

Adesso inserisci la formula $=B2-G\$2$ nella cella C2 e copia in basso sino alla cella C100. La figura mostra una schermata del PC durante questo passaggio.

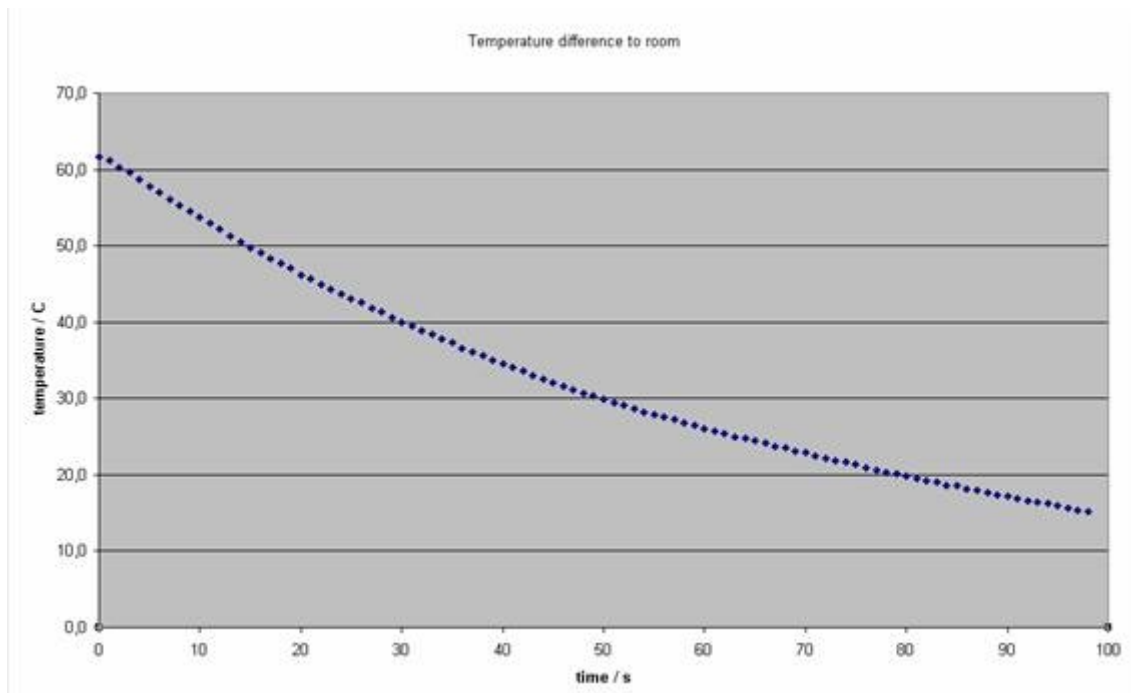


Evidenzia la colonna C e fai un click su Chart Wizard. Scegli XY Scatter.

Scegli *Next* e nei passaggi successivi potrai selezionare le serie dei dati per i valori delle x che sono nell'intervallo A2:A100.

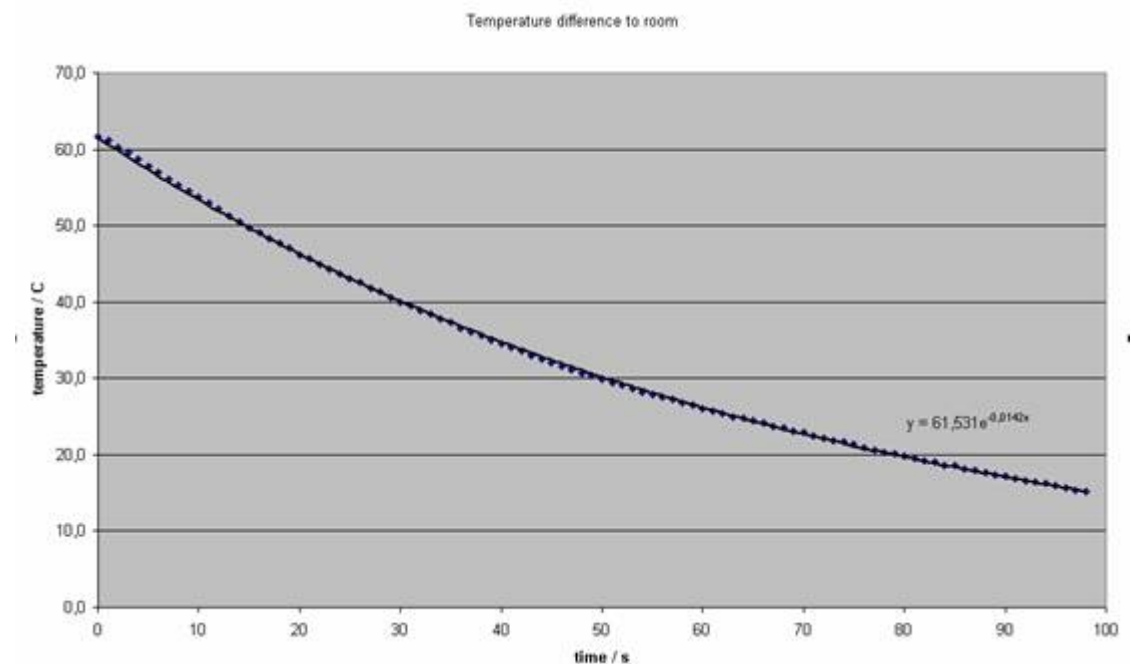


Ecco il grafico:



Il fatto che la velocità di raffreddamento sia maggiore quando è maggiore la differenza di temperatura con l'ambiente non ci sorprende. E' ragionevole ipotizzare che la curva abbia un andamento esponenziale.

Quindi proviamo un modello esponenziale. Facciamo click col tasto destro del mouse sui punti sperimentali. Scegliamo *Add trend line (aggiungi linea di tendenza)*. Quindi scegli il modello esponenziale ed anche di visualizzare l'equazione sul grafico.



La funzione modello è

$$y = 61.5 \cdot e^{-0.0142x}$$

dove y è la differenza di temperatura con la temperatura ambiente e x gli istanti di tempo.

Adesso inserisci la formula $=(C4-C2)/(A4-A2)$ nella cella D3.

Copia questa formula nella colonna D sino alla cella D99.

Infine fai un grafico della velocità di raffreddamento in funzione della differenza di temperatura rispetto alla temperatura ambiente.

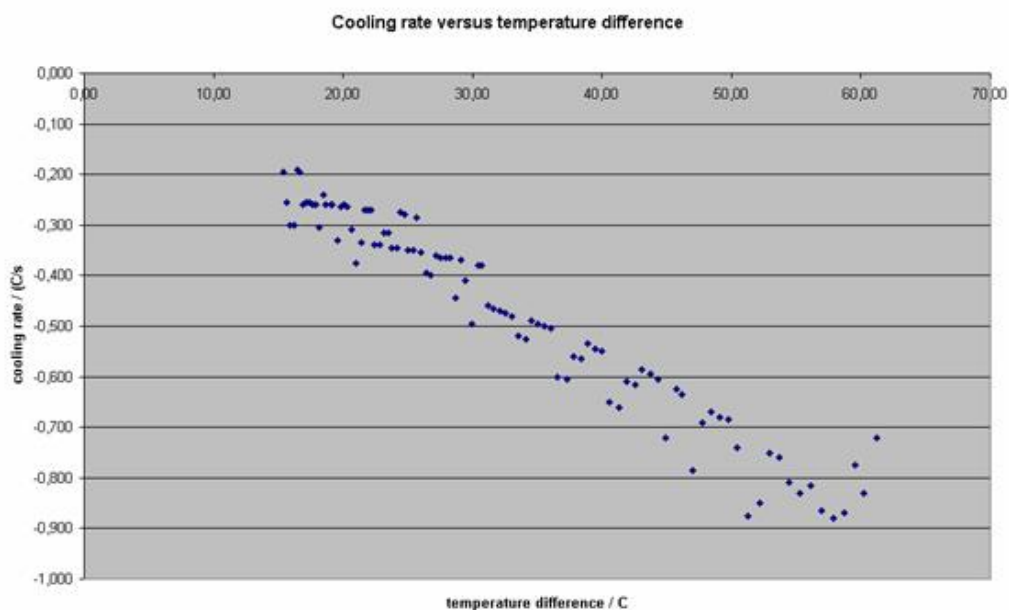
		D3		=(C4-C2)/(A4-A2)			
	A	B	C	D	E	F	G
1	time / s	temperature	temperature difference	cooling rate			Room temperature
2	0	80,7	61,7				19
3	1	80,2	61,2	-0,22			
4	2	79,3	60,3				
5	3	78,6	59,6				
6	4	77,7	58,7				
7	5	76,8	57,8				

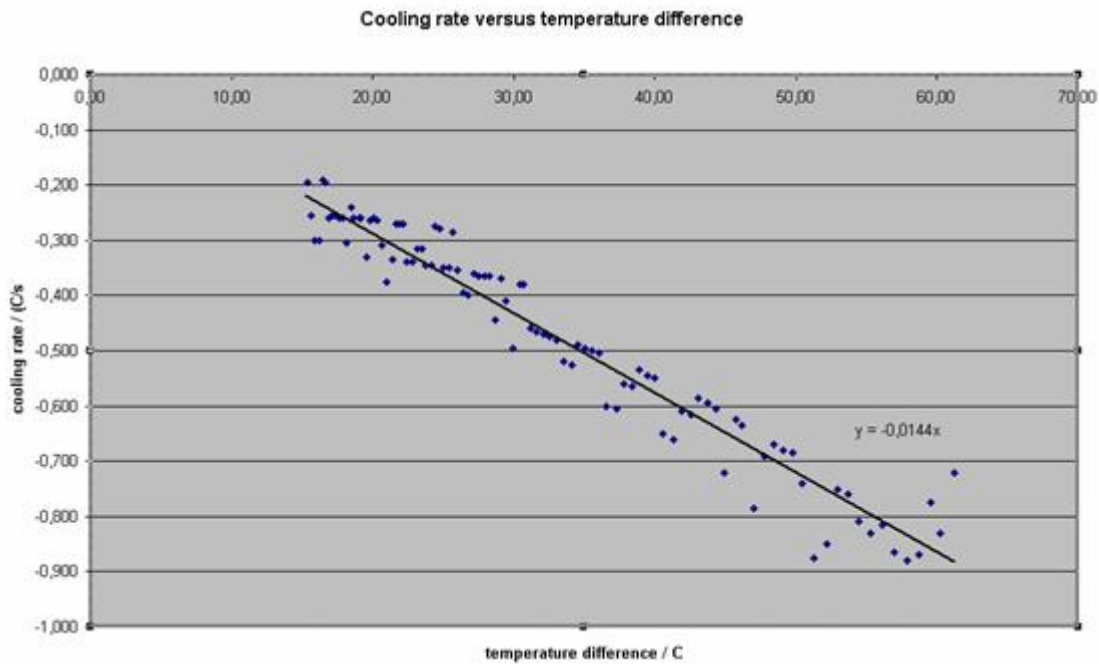
L'accuratezza della misura non è abbastanza buona per ottenere un andamento netto.

Comunque è possibile individuare una linea di tendenza che passa per l'origine degli assi.

Fai click col tasto detsro del mouse per aggiungere una linea di tendenza. Scegliamo una funzione lineare che passi per l'origine.

Ecco il grafico!





L'equazione della funzione lineare è

$$y = -0.0144 \cdot x$$

che significa che la velocità di raffreddamento è

$$- 0.0144 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

La velocità di raffreddamento può essere espressa come una derivata

$$\frac{dT_c}{dt}.$$

Quindi possiamo scrivere l'equazione come:

$$\frac{dT_c}{dt} = -k \cdot (T_c - T_0)$$

con $k = 0.0144$.

T_c è la temperatura in $^\circ\text{C}$ e T_0 la temperatura ambiente.

La velocità di raffreddamento è proporzionale alla differenza di temperatura tra l'oggetto e l'ambiente.

Questa equazione è nota come **Legge del Raffreddamento di Newton**.